

דגימה לא אחידה של אותות בעלי אפיונים

משתנים בזמן/מקום

חיבור על מחקר לתואר מגיסטר - נכתב על ידי ניר ברילר בהנחיית ד"ר משה פורת וד"ר נתן פטרפרוינד בפקולטה להנדסת חשמל בטכניון.

תקציר

במגוון יישומים נדרש לייצג אותות באמצעות סדרת דגימות שאינן מפולגות באופן אחיד. בפרט, עבור אותות שאינם מוגבלי סרט, ולפיכך אינם ניתנים לייצוג ולשחזור מתוך דגימות במרווחים קבועים, נדרשת גישה אלטרנטיבית לשיטת הדגימה הקבועה המקובלת בייצוג אותות ושחזורם. עבודה זו מבוססת על שימוש בטרנספורמציות עיוות ציר זמן המקשרת אות שאינו מוגבל סרט לאות מוגבל סרט. את האות מוגבל הסרט המתקבל ניתן לדגום ולשחזר באמצעות כלים קיימים (משפט הדגימה האחידה). ידיעה של פונקציות עיוות ציר הזמן הממפה אות מוגבל סרט לאות המקורי הנתון מאפשרת לשוב ולקבל את האות המקורי. כך מתאפשר בגישה זו שחזור מדויק לחלוטין של אות שאינו מוגבל סרט מתוך דגימות במרווחים לא אחידים בתנאי של ידיעה מושלמת של פונקציות העיוות.

חולשת הגישה שהוזכרה טמונה בצורך בידיעה מדויקת של טרנספורמציות עיוות ציר הזמן הדרושה למיפוי אות לא סטציונרי למרחב האותות מוגבלי הסרט. גישה מקובלת היא שמאחר ופונקציות עיוות ציר הזמן המבוקשת שווה לאינטגרל על פני רוחב הסרט הרגעי של האות ניתן לחשבה באופן מקורב באמצעות ביצוע אינטגרציה על פני שערך כלשהו לרוחב הסרט המקומי. מטבע הדברים, תהיה פונקציות העיוות המתקבלת, המהווה קירוב ראשון בלבד לפונקציות העיוות המבוקשת, מוגבלת בדיוקה ותלויה בשיטה שבה השתמשנו להערכת רוחב הסרט.

בעבודה זו מוצע פתרון איטרטיבי לבעיית מציאת פונקציות העיוות הנדרשת, תחתיה יהפוך האות למוגבל סרט. בגישה זו נבנית פונקציות העיוות באופן אקומולטיבי כאשר כל איטרציה נדרשת לבטל את השתנות רוחב הסרט המקומי על פני האות, עד להתכנסות לאות בעל רוחב סרט מקומי אחיד על פני כל זמן קיום האות. גישה איטרטיבית זו מאפשרת התכנסות לערך הנכון של פונקציות העיוות תוך שימוש בטכניקות קיימות להערכת רוחב סרט רגעי. באופן כזה

מתקבלות תוצאות משופרות במציאת פונקצית העיוות, תוך הקלת הדרישות על שיטת שערור רוחב הסרט המקומי המשמשת מידי איטרציה.

פונקצית עיוות ציר הזמן המתקבלת לאחר סיום התהליך האיטרטיבי, והממפה אות בעל רוחב סרט רגעי קבוע לאות הנתון נושאת בחובה הגדרה לרוחב סרט רגעי. בהיות פונקצית עיוות ציר הזמן אינטגרל על רוחב הסרט המקומי של האות ניתן, לאחר קבלת פונקצית העיוות, לחשב ממנה את רוחב הסרט המקומי באמצעות גזירתה. הגדרה זו לרוחב סרט אינה תלויה בשיטת השערור המשמשת להערכת רוחב הסרט המקומי מידי איטרציה. בהיות רוחב הסרט המקומי נגזרת של פונקצית העיוות שהיא תכונה של האות עצמו, הרי שבידינו שיטה לשערור רוחב הסרט התלויה בתכונות האות בלבד.

האפשרות לייצג אותות בעלי תכולה ספקטרלית המשתנה בזמן על פני ציר זמן מעוות מאפשרת לדגום אותם, על ציר הזמן המעוות, בקצב דגימה קבוע נמוך מזה שהיה מתחייב לצורך דגימת האות על פני ציר הזמן הנתון. עם זאת, "מחיר" הירידה בקצב הדגימה הנדרש מתבטא בצורך לשמור על מידע לגבי ערכה של פונקצית העיוות בכל נקודה ונקודה.

פונקצית עיוות ציר הזמן ניתנת לפירוש גם כפונקצית עיוות פאזה, ויכולה לשמש לאפליקציות בהן נדרש למצוא את היסטורית הפאזה של סיגנל מסוים, כגון החזרה מכ"מית (Back Scattering) ממחזיר בולט בשטח הממופה ע"י מכ"ם SAR (Synthetic Aperture Radar).

רשימת סמלים וקיצורים

פרק 1

- $\gamma(t)$ פונקצית עיוות ציר הזמן
- $\gamma^{-1}(t)$ פונקצית עיוות ציר הזמן ההופכית

פרק 2

- t משתנה הזמן
- $f(t)$ אות זמני
- $F(\omega)$ התמרת פורייה של אות $f(t)$
- ω משתנה התדר
- ω_0 חסם על רוחב הסרט
- μ_n סטייה מרגע הדגימה ה- n בסדרת דגימות במרווחים אחידים
- τ ציר זמן מעוות
- $\theta(\tau)$ הפרש בין t ל- τ
- $g(\tau)$ אות מוגבל סרט
- $h(\tau)$ אות מוגבל סרט
- T קצב דגימה קבוע
- $B(t)$ רוחב סרט רגעי

t_n - רגעי דגימה במרווחים משתנים

פרק 3

FT - התמרת פורייה (Fourier Transform)

$x(t)$ - אות זמני

$X(f)$ - התמרת פורייה של אות $x(t)$

$S(f)$ - ספקטרום של אות $x(t)$

STFT - התמרת פורייה לזמן קצר (Short Time Fourier Transform)

$w(t)$ - פונקצית חלון

$X_w(t, f)$ - STFT באמצעות חלון $w(t)$

T - משך החלון

$S_w(t, f)$ - ספקטרום של אות $x(t)$ מוכפל בחלון $w(t)$

WVD - פילוג וויגנר-ויל (Wigner-Ville Distribution)

$W_x(t, f)$ - WVD של האות $x(t)$

$W_x(n, f)$ - WVD דיסקרטי של האות $x(t)$

IF - תדר רגעי

$x_w(t, t_a)$ - האות $x(t)$ לאחר הפעלת חלון

$s(t)$ - אות מאופנן תדר

$a(t)$ - אמפליטודת אות מאופנן תדר

$\phi(t)$ - פאזת אות מאופנן תדר

- $\omega(t)$ - תדר רגעי (נגזרת פאזה)
- $\hat{B}(t)$ - קירוב לרוחב הסרט $B(t)$
- $\hat{\gamma}(t)$ - קירוב לפונקציית העיוות $\gamma(t)$
- $\hat{\gamma}^{-1}(t)$ - פונקציה הופכית לפונקציית העיוות המקורבת
- $\hat{\alpha}(t)$ - פונקציית עיוות הופכית באמצעות scaling
- $\hat{\gamma}_n$ - קירוב לפונקציית העיוות באיטרציה ה-n-ית

פרק 4

- \hat{t} - רגעי הזמן שיועתקו ע"י פונקציית העיוות ההופכית למרווחים קבועים
- $\hat{B}_n(t)$ - קירוב לרוחב הסרט באיטרציה ה-n-ית
- $B_n(t)$ - רוחב הסרט האמיתי באיטרציה ה-n-ית
- $\left\langle \frac{1}{\hat{B}_{n-1}} \right\rangle$ - ממוצע על $\frac{1}{\hat{B}_{n-1}}$ על פני כל הקטע הנבחן
- ζ - נקודת ביניים באינטרוול $\left[t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2} \right]$
- η - נקודת ביניים באינטרוול $\left[t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2} \right]$
- $\hat{e}_n(t)$ - השגיאה בהערכת רוחב הסרט באיטרציה ה-n-ית
- r - משתנה אקראי מפולג אחיד
- $w(n)$ - דגימת רעש
- T_r - זמן הרלקסציה

- האות הזמני $x(t)$
- האות הזמני המשוחזר לאחר ביצוע התהליך האיטרטיבי $x_{rec}(t)$

פרק 7

- Synthetic Aperture Radar SAR
- האות המשודר $S_t(t)$
- רוחב סרט ה-LFM המשודר B
- רוחב פולס השידור t_p
- האות הנקלט $S_r(t)$
- רפלקטיביות של נקודה m,n $A_{m,n}$
- טווח המטוס מנקודה m,n $\bar{R}_{m,n}(t)$
- מהירות המטוס v_0
- מהירות המחזיר בנקודה m,n $v_{m,n}$

פרק 1

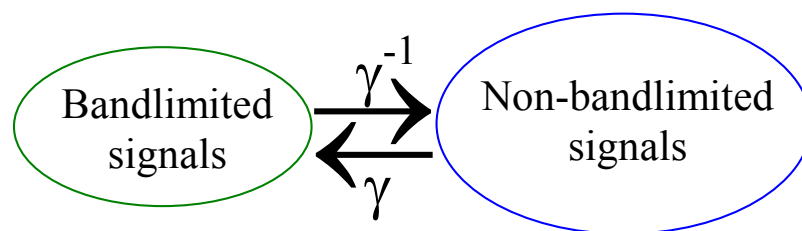
מבוא

ביישומים רבים ([1], [2], [3]) נודעת חשיבות רבה ליכולת לייצג באופן מדויק אותות שנדגמו בקצב לא אחיד. גם העין האנושית מבצעת באמצעות חיישנים על הרשתית דגימה שאינה אחידה, בקצב היורד עם ההתרחקות ממרכז שדה הראיה.

התמרת פורייה העושה שימוש בפונקציות בסיס שאינן לוקליות, מחושבת על סמך האינפורמציה הזמנית של האות על פני פרק זמן אינסופי. ברור לכן, כי עבור אותות שאינם סטציונריים, השינוי הזמני באינפורמציה התדר לא יבוא לידי ביטוי באמצעות ההתמרה. רוחב הסרט הכללי יקבע, אם כן, ע"י רוחב הסרט המכסימלי של האות על פני כל זמן קיומו.

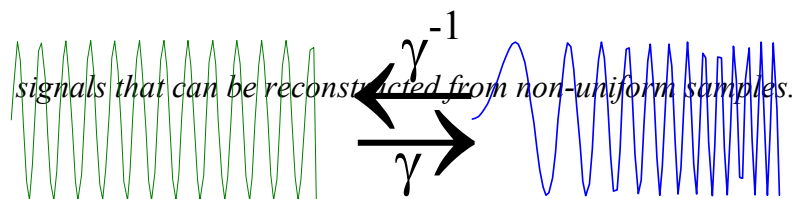
גישה כללית לייצוג ושחזור של אותות באמצעות דגימה לא אחידה הוצעה ע"י Clark *et al.* ב-[4]. גישה זו, שהתבססה על עבודה של Papoulis [5], היוותה קפיצת מדרגה בכך שאינה מוגבלת לטיפול באותות שדגימותיהם סוטות אך במעט מדגימות אחידות (תופעת jitter).

על פי הגישה המוצעת, קבוצת אותות הניתנים לשחזור מדויק מדגימות שאינן אחידות, מתקבלת מהפעלת פונקצית עיוות ציר זמן על קבוצת הפונקציות מוגבלות הסרט, כמוראה באיור 1.1. לפיכך ניתן להסתכל על פונקצית עיוות ציר זמן (מסומנת ע"י γ) כמקשרת בין אות מוגבל סרט הדגום אחידות, לבין אות (בעל ציר זמן מעוות) הדגום בצורה לא אחידה, כמתואר באיור 1.1.



איור 1.1 - הקשר בין מרחב האותות מוגבלי הסרט למרחב אותות הניתנים לשחזור מדגימה לא אחידה.

Figure 1.1 - The relationship between the set of bandlimited signals and the set of



איור 1.2 - דוגמה לפעולת פונקציית העיוות ופונקציית העיוות ההופכית על האות.

Figure 1.2 - Example of a time distorted signal and an inversely time distorted signal.

מעניינת במיוחד היא האפשרות לשערך נקודות דגימה אופטימליות במובן כזה, שע"י שערך פונקציית העיוות האופטימלית יתאפשר למלא את תנאי נייקוויסט (עבור האות מוגבל הסרט שיתקבל), דבר שיאפשר שחזור מלא ומדויק של הפונקציה.

ידיעת "רוחב הסרט הרגעי" של האות (נושא בעייתי בפני עצמו) תאפשר לעוות את ציר הזמן בצורה כזו, כך שהפונקציה שתתקבל על פני ציר הזמן המעוות תהיה בעלת רוחב סרט כמעט אחיד (נמוך מרוחב הסרט הכללי של האות). בתנאי של מוגבלות סרט על פני ציר הזמן המעוות מתקבל שחזור מלא ומדויק של הפונקציה מדגימות במרווחי זמן אחידים לפי משפט הדגימה הקלאסי המוכר.

לצורך הערכת "רוחב הסרט הרגעי" של אות ניתן להשתמש בייצוגי אותות במרחב המשולב זמן-תדר המציגים את השינויים הזמניים החלים ברכיביו הספקטרליים של האות. ההבדלים העקרוניים בין ההצגות המשולבות זמן-תדר השונות יגרמו להבדלים בשערך רוחב הסרט. למרות זאת, נראה כי תוצאת השערך המתקבלת על פי עקרון איטרטיבי, המתואר בעבודה זו, אינה תלויה בשיטת השערך.

התהליך האיטרטיבי המוצע משתמש בייצוג זמן-תדר לצורך התכנסותו, אולם רגישותו לסוג הייצוג נמוכה, והערך הסופי של פונקציית העיוות אליו מתכנס התהליך (לאחר מספר מספיק של איטרציות) תלוי רק באות עצמו.

עובדה זו מרמזת לכשעצמה שפונקציית העיוות היא תכונה של האות עצמו. מאחר שנגזרת פונקציית העיוות מגדירה את רוחב הסרט הרגעי, הרי שקיבלנו מדד רובוסטי לשערך רוחב סרט רגעי, אשר תלוי אך ורק בתכונות האות.

בפרק הבא (פרק 2) נציג את תורת הדגימה הלא אחידה ואת שלבי התפתחותה [4,5,6,7]. לאחר מכן תוצג הבעייתיות העקרונית אשר מנעה את הפיכתה של הגישה הקיימת שגובשה ע"י Clark *et al.* [4] למעשית.

פרק 3 סוקר מספר שיטות סטנדרטיות המשמשות להערכת רוחב סרט מקומי ומציג את יתרונות השיטה האיטרטיבית על פניהן.

פרק 4 מציג את טרנספורמציית עיוות ציר הזמן, השפעתה על הפיכת רוחב הסרט לאחיד יותר, מנתח את מקור השגיאה ומציג אנליזה לבחינת התכנסותה.

פרק 5 מדגים את התכנסות התהליך האיטרטיבי עבור מספר אותות ואילו פרק 6 מציג בעיות בהתכנסות ומדגים אותן. פרק 7 מציג את ישימות השיטה המוצעת גם לאפליקציות שיפור תמונות SAR (Auto-Focus) והדמיית מטרות נעות.

פרק 2

דגימה לא אחידה של אותות מעוותי ציר זמן/מקום

2.1 הרחבת משפט הדגימה הקלאסי לדגימה לא אחידה

נציג להלן את הרחבת משפט הדגימה החד ממדי של Whittaker-Kotel'nikov-Shannon [6] עבור דגימה לא אחידה כפי שהוצג ע"י Clark *et al.* [4].

נקודת הפתיחה לדיון היא משפט הדגימה האחידה המוצג ב-[6].

משפט 1: משפט הדגימה האחידה במקרה החד ממדי

פונקציה: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

מוגבלת סרט: $F(\omega) = 0, \forall \omega \geq \omega_0 = \frac{\pi}{T}$

הנדגמת בנקודות: $t_n = nT$

ניתנת לשחזור מלא ומדויק מדגימותיה $f(nT)$ בצורה:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \text{sinc}[\omega_0(t - nT)] \quad (2.1)$$

ב-[5] מנתח Papoulis שגיאות דגימה ממספר סוגים. אנו מתעניינים בשגיאות הנובעות מדגימה במרווחים לא קבועים. הדיון ב-[5], למרות שהוא מוגבל לדיון בשגיאות קטנות במיקום נקודות הדגימה (jitter) עבור אותות מוגבלי סרט, הוא חשוב בכך שהוא מניח את הבסיס גם לשיטה הכללית המוצגת ב-[4].

במקום סט הדגימות $f(nT)$ הנדרש לשחזור $f(t)$ נמצאות בידינו הדגימות $f(nT - \mu_n)$, כאשר μ_n מייצגת את סטיית רגע הדגימה ה-n-י ממיקומו המתוכנן. לצורך שחזור $f(t)$ מתוך $f(nT - \mu_n)$, נאלץ Papoulis להשתמש בקירוב המבוסס על ההנחה ש- μ_n קטנים.

השחזור שהוצע ב-[5] מבוצע ע"י שימוש בפונקציות עיוות ציר זמן $\tau = \gamma(t)$, המאפשרת לשחזר את $f(t)$ מתוך $f(nT - \mu_n)$.

בשיטה זו [5] הקשר בין ציר הזמן הנתון לציר הזמן המעוות הוא:

$$t = \tau - \theta(\tau) \quad ; \quad \tau = \gamma(t) \quad (2.2)$$

כאשר

$$\theta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n \text{sinc}[\omega_2(\tau - nT)] \quad (2.3)$$

היא פונקציה מוגבלת סרט ו- ω_2 הוא החסם על רוחב הסרט שלה, ונעשה שימוש בקירוב:

$$g(\tau) = f(\tau - \theta(\tau)) \cong f(\tau) - \theta(\tau)f'(\tau) \quad (2.4)$$

מתוך $g(\tau)$ ניתן לשחזר את $f(t)$.

אנו מתעניינים כעת במקרה אחר, בו קצב הדגימה אינו אחיד, ואף אינו מוגבל להיות אחיד בקירוב. יתרה מכך, אנו מעוניינים לייצג לא רק אותות מוגבלי סרט אלא גם אותות שאינם מוגבלי סרט. ב-[4] הוצג משפט הדגימה הלא אחידה המובא להלן:

משפט 2: משפט דגימה חד ממדית לא אחידה [4]

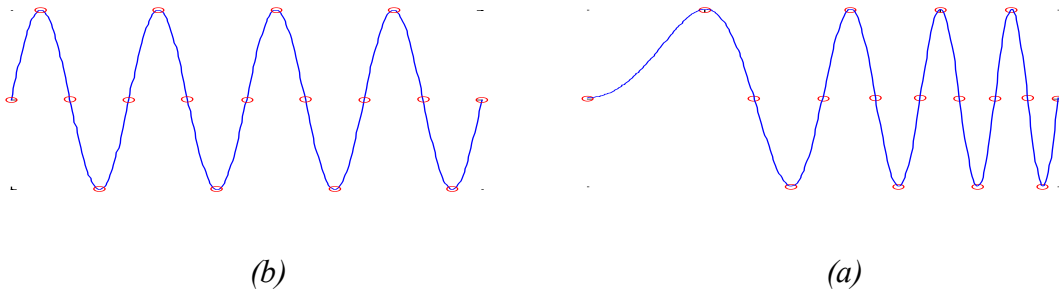
פונקציה $f(t)$ נדגמת בנקודות $t = t_n$, כאשר t_n אינה בהכרח סדרה של דגימות מפולגות אחידות.

אם קיימת פונקציה מיפוי חד ממדית $\gamma(t)$, כך ש- $nT = \gamma(t_n)$, ואם $h(\tau) = f(\gamma^{-1}(\tau))$

מוגבלת סרט ל- $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$, הרי שמתקיים:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \text{sinc}[\omega_0(\gamma(t) - nT)] \quad (2.5)$$

האותות $f(t)$ ו- $h(\tau)$ מוצגים באיור 2.1.



איור 2.1 - (a) - האות $f(t)$, (b) - האות $h(\tau)$.

Figure 2.1 - (a) - the signal $f(t)$, (b) - the signal $h(\tau)$.

2.2 גישות שונות לדגימה לא אחידה

דגימת האות $f(t)$ דוגמת המוצג באיור 2.1(a) בקצב אחיד אינה שיטת הדגימה היעילה ביותר. סביר יותר לדרוש קצב דגימה גבוה יותר באזורים בהם האות מכיל רכיבי תדר גבוהים מאשר קצב הדגימות שיידרש באזורים בהם מכיל האות רכיבים ספקטרליים בתדרים נמוכים יותר.

למסקנה זו הגיע Horiuchi [7]. Horiuchi טען כי נוסחת השחזור לאות בעל רוחב סרט משתנה בזמן $B(t)$, שנדגם בקצב $2B(t)$ היא:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \text{sinc}[\pi(2B(t)t - n)] \quad (2.6)$$

את נגזרת המיפוי $\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t}$ ניתן לראות כרוחב הסרט המקומי [4], ומתקבל כי:

$$\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\omega_0} B(t) \quad ; \quad \gamma(t) = k + \int_0^t \frac{2\pi}{\omega_0} B(r) dr \quad (2.7)$$

אם רוחב הסרט $B(t)$ קבוע (או ניתן לקרבו ככזה על גבי אינטרוול נתון), הרי שניתן לומר כי:

$$\gamma(t) = \frac{2\pi}{\omega_0} B(t)t \quad (2.8)$$

ותחת הנחה זו מזדהות נוסחאות השחזור (2.5) של Clark [4] ו-(2.6) של Horiuchi [7].

מהניתוחים שהובאו לעיל ברור כי כדי לדגום בצורה בלתי אחידה אות שרירותי $f(t)$, השייך למרחב האותות המתואר, נדרש למצוא את פונקצית עיוות ציר הזמן ($\gamma(t)$) המתאימה. פונקצית עיוות זו תחושב ע"י ביצוע אינטגרציה על שערוך רוחב הסרט המקומי של האות.

הניתוח הנ"ל מסתבך עקב העובדה שלא קיימת הגדרה מדויקת ל"רוחב סרט מקומי", מאחר שרוחב סרט מוגדר בצורה גלובאלית, בהיותו מדד של מרחב התדר. לפיכך נאלץ להסתפק בשערוך סביר של רוחב הסרט.

יתרה מכך, משפט השחזור שתואר לעיל דורש את ידיעת הפונקציה $\gamma(t)$ בכל הנקודות t שבהן נרצה לשחזר את הפונקציה. אם ידוע ביטוי אנליטי עבור סדרת הדגימה t_n (כגון $t_n = s(n)$), הרי שניתן פשוט להרחיב את הביטוי האנליטי כך שיכלול ערכים לא שלמים (כגון $\gamma(t) = s(t)$). אם לא ניתן להגיע לביטוי אנליטי כזה, או שאת הביטוי האנליטי לא ניתן להרחיב לערכים שאינם שלמים, הרי $\gamma(t)$ חייב להיות מחושב מביצוע אינטרפולציה בין נקודות $\gamma(n)$. האילוץ היחיד על אינטרפולציה זו הוא שתוצאתה חייבת להיות γ שהיא חד-חד ערכית והפיכה (מונוטונית עולה).

פרק 3

שערוך פונקצית העיוות מתוך רוחב סרט מקומי

3.1 הקדמה

כאמור במבוא לעבודה זו, שערוך פונקצית עיוות ציר הזמן של אות מתבסס על שערוך רוחב הסרט הרגעי בכל נקודה ונקודה על ציר הזמן. בפרק זה יוצגו מספר שיטות המבוססות על פילוגי זמן-תדר [8] המתאימות לתיאור ולשערוך רוחב סרט מקומי. כמקרה פרטי תוצג השיטה המתאימה לשערוך רוחב סרט מקומי עבור אותות מאופנני תדר.

3.2 שערוך רוחב סרט מקומי

3.2.1 שערוך רוחב סרט מקומי ע"י STFT

ריבוע העצמה של התמרת פורייה (Fourier Transform) FT, היא אחת השיטות המקובלות לייצוג האינפורמציה בתחום התדר או הספקטרום של אות סטציונרי [8]. עבור אות זמני רציף המשתנה בזמן $x(t)$, התמרת פורייה מוגדרת ע"י:

$$X(f) = F(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.1)$$

כאמור, האינפורמציה מוגדרת על פני אינטרוול זמן אינסופי. עבור אותות שאינם סטציונריים, לא יבוא לידי ביטוי שינוי זמני אפשרי באינפורמציה התדר, מאחר שהספקטרום הוא:

$$S(f) = |X(f)|^2 \quad (3.2)$$

ייצוג חלופי הוא התמרת פורייה לזמן קצר STFT (Short Time Fourier Transform), המחושבת ע"י הפעלת פונקצית חלון על האות המקורי, וחישוב התמרת פורייה הרגילה של הרצף הסופי המתקבל. ה-STFT של הסיגנל $x(t)$ נתון ע"י:

$$X_w(t, f) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.3)$$

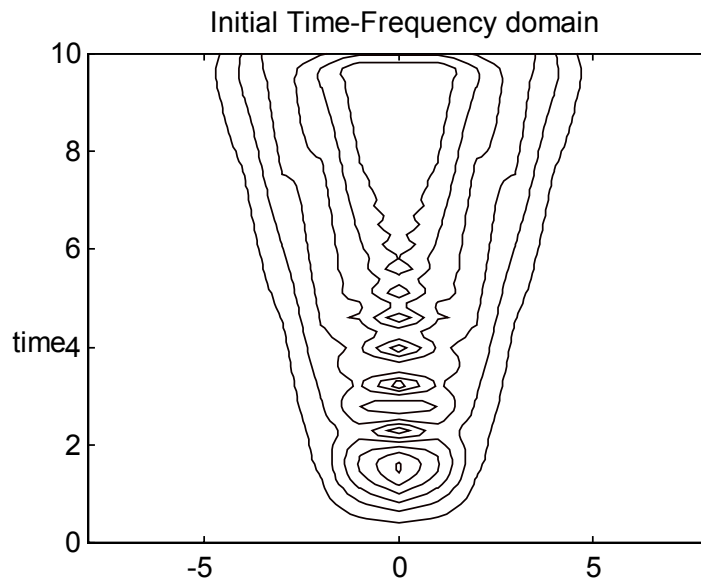
כאשר $w(t)$ היא פונקצית חלון המקיימת:

$$w(\tau) = 0 \quad ; \quad |\tau| > \frac{T}{2} \quad (3.4)$$

שימוש בטכניקה זו מאפשר קבלת קירוב של התוכן הספקטרי במרכז אינטרוול החלון, בהנחה שפאזות האות ליניארית בקירוב במשך פרק הזמן הקצר T , ע"י החישוב:

$$S_w(t, f) = |X_w(t, f)|^2 \quad (3.5)$$

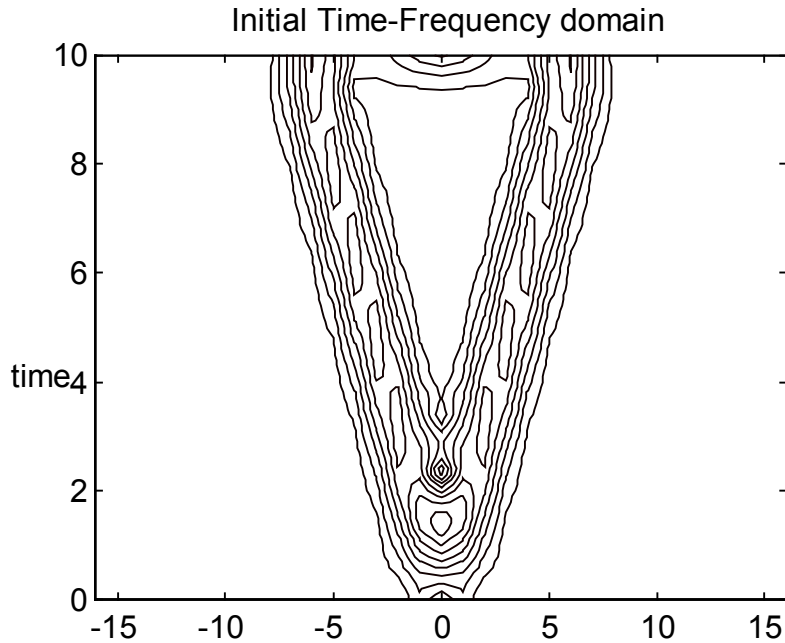
השיטה הפשוטה ביותר לניתוח במרחב זמן תדר היא STFT, אולם בשיטה זו הרזולוציה בתדר תלויה ביחס הפוך בגודל החלון הזמני. הארכת החלון משפרת את הרזולוציה בתדר, אולם בעת ובעונה אחת מקטינה את יכולת עקיבת התדר של ייצוג זה. איור 3.1 מציג פילוג זמן תדר STFT של אות chirp ממושקל בחלון גאוסני.



איור 3.1 - פילוג זמן תדר STFT של אות chirp ממושקל בחלון גאוסני.

Figure 3.1 - STFT distribution of chirp signal using a gaussian weighted window.

איור 3.2 מציג את ה-STFT של אותו אות שהוצג באיור 3.1, אולם הפעם חושב הפילוג תוך שימוש ברוחב חלון כפול.



איור 3.2 - פילוג זמן תדר STFT של אות chirp ממוסקל בחלון גאوسي ברוחב כפול.

Figure 3.2 - STFT distribution of chirp signal using a Gaussian weighted window twice as wide as in Figure 3.2.

בשנים האחרונות נחקרו ייצוגי זמן - תדר חלופיים. פילוג Wigner-Ville (WVD) מאפשר קבלת רזולוציה משופרת, מאחר שזהו פילוג בו ממורכזת אנרגיית האות באופן מיטבי סביב עקום התדר הרגעי (Instantaneous Frequency). הבחירה בפילוג Wigner-Ville, שהוא פילוג בי-ליניארי המתאים לריבוע האות, מאפשרת להתייחס אליו כמבטא את הפילוג הספקטרלי של אנרגיית האות [9], [10], [11]. עם זאת, היא מחייבת התמודדות עם בעיית האיברים הצולבים (cross terms) הנוצרים בעת קיום יותר מרכיב אחד. פילוגים משופרים מאפשרים הנחתה ואף דיכוי מלא של איברים אלה [12], [13].

3.2.1 שערך רוחב סרט מקומי ע"י שימוש בפילוג וויגנר-ויל

$x(t)$ פונקציה קומפלקסית רציפה ואנליטית בעלת התמרת פורייה $X(f)$. נראה את ייצוג WVD במקרה הבדיד והרציף [9].

פילוג WVD מוגדר בתחום הזמן בצורה :

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.6)$$

בתחום התדר ההגדרה המתאימה היא :

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{\xi}{2}\right) X^*\left(f - \frac{\xi}{2}\right) e^{j2\pi t\xi} d\xi \quad (3.7)$$

למרות ששתי ההגדרות שקולות, ההגדרה בתחום התדר מורכבת יותר מבחינה חישובית מאחר והיא דורשת ידיעת התמרת פורייה של האות. לפיכך נעסוק בהגדרה בתחום הזמן.

רואים שחישוב WVD אינו פעולה פשוטה, וזאת מאחר שיש צורך בידיעת ערך הסיגנל בכל נקודת זמן, לפני שניתן לחשב את WVD. ביטוי כזה אינו מאפשר חישוב בזמן אמת (Real Time), כאשר ניתן לאפשר רק פיגור סופי.

על הגבלה זו ניתן להתגבר ע"י הפעלת ניתוח (אנליזת) WVD על הסיגנל לאחר שהופעל עליו חלון. האות העובר דרך החלון יהיה :

$$x_w(t, t_a) = x(t)w(t - t_a) \quad (3.8)$$

כאשר $w(t)$ היא פונקצית חלון המקיימת :

$$w(t) = 0 \quad \text{for} \quad |t| < \frac{T}{2} \quad (3.9)$$

WVD של הסיגנל לאחר הפעלת החלון היא :

$$W_{x_w}(t, f) = W_x(t, f)_f^* W_w(t, f) \quad (3.10)$$

השפעת החלון היא במריחת ייצוג WVD בכיוון התדר בלבד, ומכאן שניתן להגדיל את הרזולוציה בתדר ע"י שימוש בחלון ארוך יותר, מבלי להשפיע על הרזולוציה בזמן.

מחישוב $W_x(t, f)$ ניתן לחשב את WVD בכל זמן. נשנה את הסימון t_a ל- t ונקבל :

$$W_x(t, f) = \int_{-T_w}^{T_w} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) w\left(\frac{\tau}{2}\right) w^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.11)$$

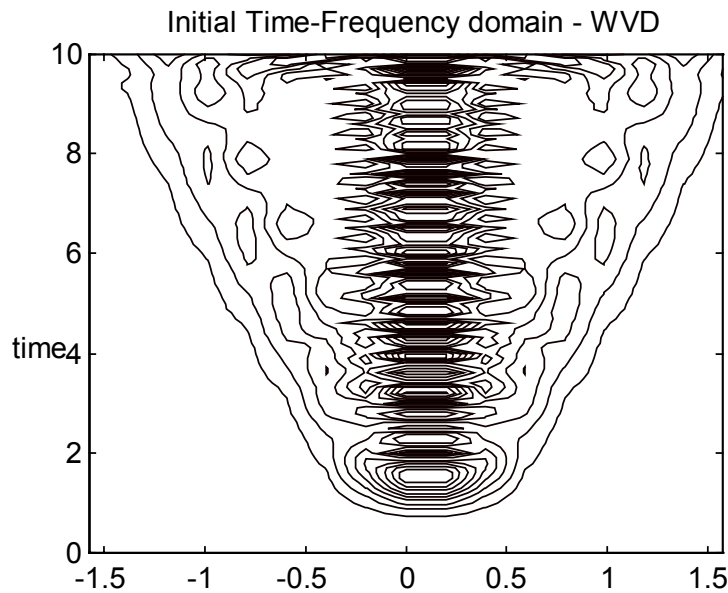
המקרה הדיסקרטי המקביל ל-(3.11) הוא :

$$W_x(nT, f) = 2T \sum_{l=-L}^L x(nT + lT) x^*(nT - lT) w(lT) w^*(-lT) e^{-j4\pi f l T} \quad (3.12)$$

עבור $T=1$:

$$W_x(n, f) = 2 \sum_{l=-L}^L x(n+l) x^*(n-l) w(l) w^*(-l) e^{-j4\pi f l} \quad (3.13)$$

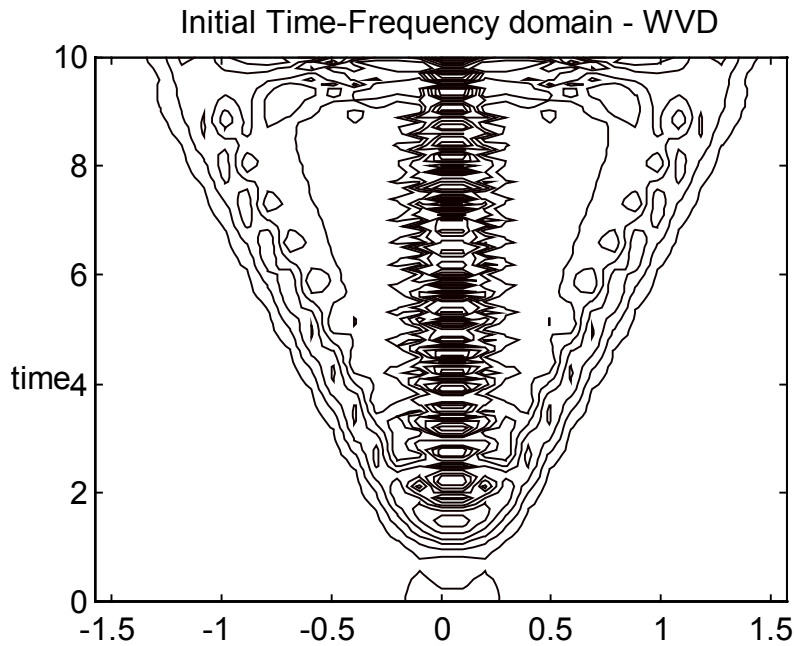
איור 3.3 מציג פילוג זמן תדר Wigner-Ville של אות chirp ממושקל בחלון גאוס. איור 3.2 מציג פילוג זמן תדר Wigner-Ville של אותו אות שהוצג באיור 3.1, אולם הפעם חושב הפילוג תוך שימוש ברוחב חלון כפול.



איור 3.3 - פילוג זמן תדר Wigner-Ville של אות chirp ממושקל בחלון גאוס.

Figure 3.3 - Wigner-Ville distribution of chirp signal using a Gaussian weighted

window.



איור 3.4 - פילוג זמן תדר Wigner-Ville של אות chirp ממושקל בחלון גאوسي ברוחב כפול.
Figure 3.4 - Wigner-Ville distribution of chirp signal using a Gaussian weighted window twice as wide as in Figure 3.3.

3.3 שערוך רוחב סרט מקומי של אותות מאופנני תדר

כמקרה פרטי מעניין להתבונן באותות מאופנני תדר. פונקצית עיוות ציר הזמן עבור אותות כאלה היא למעשה פונקצית האפנון (מקשרת בין אות מוגבל סרט לאות מאופנן תדר). נתבונן ברוחב הסרט המקומי של אותות מאופנני תדר מהצורה:

$$s(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (3.14)$$

עבור אותות כאלה התדר הרגעי IF ניתן להגדרה בצורה:

$$IF \triangleq \frac{d\phi}{dt} \quad (3.15)$$

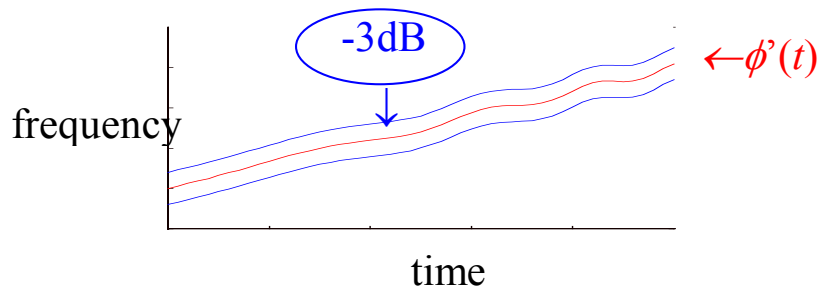
עבור המקרה הפרטי שבו שינוי הפאזה לינארי ($\phi = \omega t$), נקבל כי:

$$IF = \omega \quad (3.16)$$

עבור אות כללי מהצורה $s(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$ הוראה בעבר ([14], [15]) כי מרכז ההתפלגות הספקטרלית עבור פילוג וויגנר-ויל ברגע מסוים נתון ע"י נגזרת פונקצית העיוות של האות:

$$\langle \omega | t \rangle = \phi'(t) \quad (3.17)$$

עבור אות כללי רצוי להעריך את רוחב הסרט של האות על סמך נקודות -3dB. איור 3.5 מציג את שתי הגישות לשערך רוחב הסרט המקומי של האות.



איור 3.5 - קביעת רוחב הסרט המקומי ע"י נגזרת הפאזה או ע"ס נקודת -3dB.

Figure 3.5 - Instantaneous bandwidth definition based on the phase derivative or according to the -3dB point.

3.4 גישה איטרטיבית לשערוך פונקצית העיוות

השיטות שתוארו לעיל בפרק זה מוגבלות בדיוקן או בקבוצת האותות שבהם הן יכולות לטפל. על מנת לשערך בצורה מדויקת יותר את רוחב הסרט המקומי ואת פונקצית העיוות של אותות כלליים נדרש להשתמש בשיטה שונה. בפסקה זו מוצגת שיטה איטרטיבית המהווה את הבסיס למחקר זה. באנלוגיה לשיטת השערוך של Poletti [14], ניתן להעריך את רוחב הסרט המקומי של אות כללי (ולא בהכרח אות FM כדוגמת (3.14)) תוך שימוש בנקודת -3dB של ההתמרה הספקטרלית שלו. קירוב ראשון לפונקצית העיוות הדרושה יתקבל מתוך השערוך הראשון שבוצע לרוחב הסרט המקומי של האות:

$$\hat{\gamma}(t) = \int_0^t \frac{2\pi}{\omega_0} \hat{B}(r) dr \quad (3.18)$$

נזכיר כי פונקצית העיוות הופכת אות בעל רוחב סרט מקומי אחיד, לאות בעל רוחב סרט מקומי משתנה. עבור אותות FM, שקולה פעולה זו לביצוע אפנון.

לשם ביצוע התהליך נדרשת פונקציה שתבצע את הפעולה ההפוכה, היינו תבטל את ה"עיוות" הקיים באות כתוצאה מהשתנות רוחב הסרט המקומי על פניו:

$$\gamma(\hat{\gamma}^{-1}(t)) \cong t \quad (3.19)$$

ואולם חישוב הפונקציה ההפוכה $\hat{\gamma}^{-1}(t)$ הוא בעייתי ומסובך חישובית. על מנת להתגבר על הצורך לחשבו ניתן לעוות את ציר הזמן באופן שישאף לבטל את השינויים ברוחב הסרט המקומי. עיוות זה מבוצע ע"י הפונקציה $\hat{\alpha}(t)$ שתוצג להלן:

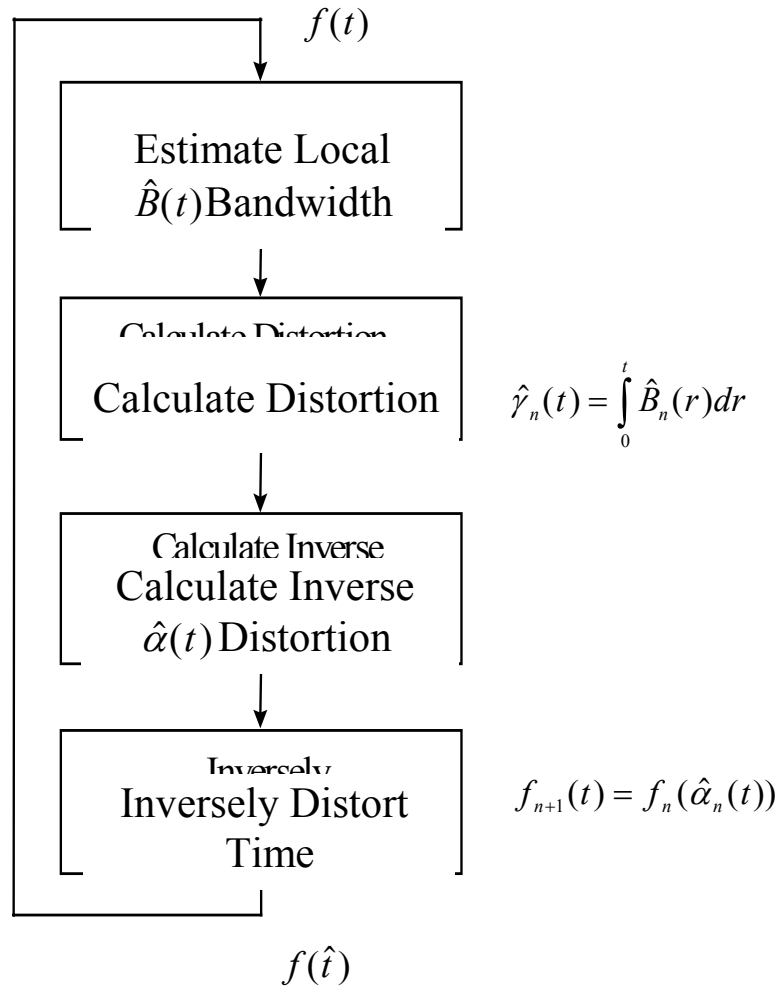
$$\hat{\alpha}(t) = \frac{\int_0^t \frac{1}{\hat{B}(r)} dr}{\int_0^{t_{\max}} \frac{1}{\hat{B}(r)} dr} t_{\max} \quad (3.20)$$

יתרון משמעותי של השימוש הפונקציה $\hat{\alpha}(t)$ שהוצגה לעיל לעומת חישוב הפונקציה ההפוכה $\hat{\gamma}^{-1}(t)$ טמון בעובדה כי $\hat{\gamma}^{-1}(t)$ תלויה ב- $\hat{\gamma}(t)$ בעוד $\hat{\alpha}(t)$ תלויה ישירות ב- $\hat{B}(t)$. בכך נחסכת ההסתמכות על אינטרפולציה של חישוב $\hat{\gamma}^{-1}(t)$ על פי $\hat{\gamma}(t)$.

מאחר שהקרוב $\hat{\alpha}(t)$ מבוסס על שערוד רוחב סרט מקומי שאינו מדויק מוצע להשתמש בגישה איטרטיבית. הגישה האיטרטיבית המוצעת מורכבת מהשלבים הבאים:

- שערוד רוחב הסרט המקומי של האות, תוך שימוש בפילוג זמן תדר מקובל כלשהו (למשל STFT או Wigner-Ville).
- שערוד פונקצית העיוות של האות על סמך שערוד רוחב הסרט המקומי. מתמטית מחושב השערוד של פונקצית העיוות על ידי ביצוע אינטגרציה על רוחב הסרט המקומי ששוערד לעיל.
- חישוב פונקצית העיוות ההפוכה שבה נשתמש כדי לבטל את השינויים ברוחב הסרט המקומי.
- עיוות ציר הזמן ע"י הפונקציה ההופכית לפונקצית העיוות המשוערכת שחושבה לעיל ($\hat{\alpha}(t)$ או $\hat{\gamma}^{-1}(t)$).

שלבי הגישה האיטרטיבית המוצעת מתוארים בתרשים זרימה באיור 3.6.



איור 3.6 - תרשים זרימה עקרוני לתיאור התהליך האיטרטיבי.

Figure 3.6 - Flow chart of the iterative process.

במשך ביצוע התהליך נצברת פונקצית העיוות הכוללת. לאחר קבלת החלטה על סיום התהליך האיטרטיבי, לאור השגת שערך רוחב סרט מקומי אחיד במידה מספקת ע"פי הדיוק הנדרש, תוגדר פונקצית העיוות הכוללת:

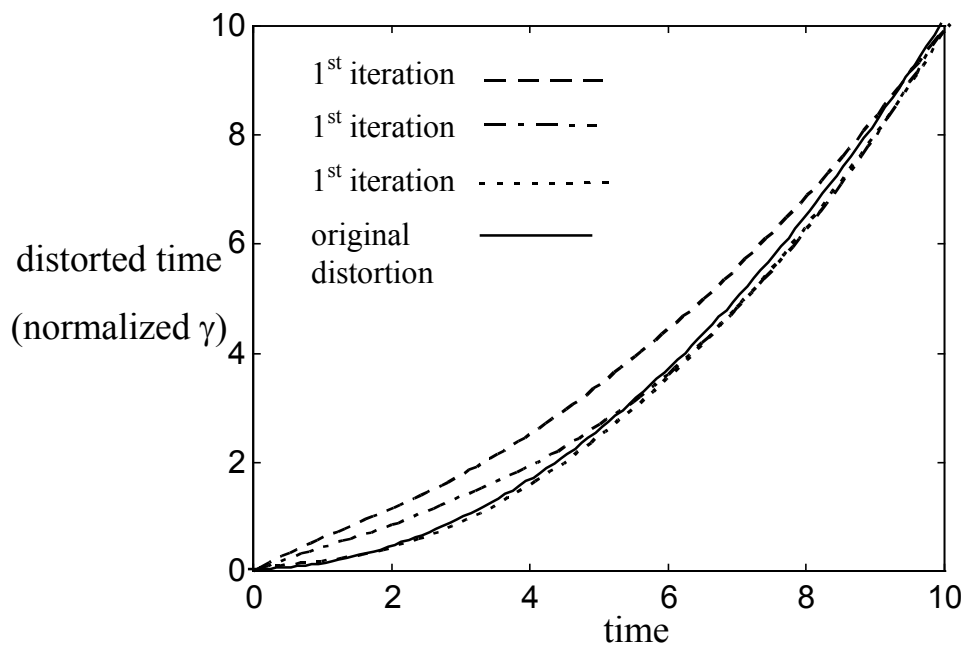
$$\hat{\gamma}_n \hat{\gamma}_{n-1} \dots \hat{\gamma}_1(t) \cong \gamma(t) \tag{3.21}$$

לצורך קבלת החלטה באשר להמשך או להפסקת התהליך האיטרטיבי ניתן לקבוע סף מינימלי למידת השונות של פונקצית העיוות שהתווספה באיטרציה האחרונה. שונות נמוכה מפונקצית

עיוות ציר זמן ליניארית (שלמעשה כמעט ואינה מעוותת) מרמזת כי התהליך קרוב להתכנסות וכי ההבדלים ברוחב הסרט המקומי מינוריים.

גישה איטרטיבית זו מאפשרת התכנסות לפונקצית עיוות ציר הזמן הרצויה תוך שערך רוחב הסרט המקומי מתוך התמרות זמן-תדר שונות, ומאפשרת להתגבר באופן אקומולטיבי על השגיאות הנובעות מחוסר הדיוק בשערך רוחב הסרט המקומי.

דוגמה להתכנסות פונקצית העיוות לערכה התיאורטי מובאת באיור 3.7 עבור אות chirp.



איור 3.7 - דוגמה להתכנסות פונקצית העיוות לערכה התיאורטי.

Figure 3.7 - Example of distortion function convergence to its theoretical value.

פרק 4

טרנספורמציות עיוות ציר הזמן

4.1 עיוות ציר הזמן

לשם ביצוע עיוות הפוך לציר הזמן, כך שהאות על פני ציר הזמן המתקבל יהיה בעל רוחב סרט מקומי קבוע, נדרש להגדיר פונקציה שתבטל את העיוות הקיים באות כתוצאה מהשתנות רוחב הסרט המקומי על פניו.

$$\hat{t} \equiv \alpha(t) = \frac{\int_0^t \frac{1}{\hat{B}(r)} dr}{\int_0^{t_{\max}} \frac{1}{\hat{B}(r)} dr} t_{\max} \quad (4.1)$$

ונגזרת הפונקציה:

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{\frac{1}{\hat{B}(t)}}{\int_0^{t_{\max}} \frac{1}{\hat{B}(r)} dr} t_{\max} = \frac{\frac{1}{\hat{B}(t)}}{\left\langle \frac{1}{\hat{B}(t)} \right\rangle} ; \quad \left\langle \frac{1}{\hat{B}(t)} \right\rangle \equiv \frac{\int_0^{t_{\max}} \frac{1}{\hat{B}(r)} dr}{t_{\max}} \quad (4.2)$$

המוטיבציה הישירה לשימוש בפונקציה זו נובעת מניסיון להחלת תכונת ה-scaling של התמרת פורייה:

$$F(\omega) = \mathbf{F}\{f(t)\} \Rightarrow \mathbf{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (4.3)$$

ברוח עיקרון ה-scaling שתואר לעיל, נשאף להגדיל את המרווחים בין נקודות באזורים בהם שוער רוחב הסרט כגבוה, ולצופף נקודות באזורים בהם שערך רוחב הסרט המקומי נמוך. נתבונן בנגזרת פונקצית העיוות:

$$\begin{aligned} \hat{t}' < 1 & \text{ for } \frac{1}{\hat{B}(t)} < \left\langle \frac{1}{\hat{B}} \right\rangle \\ \hat{t}' = 1 & \text{ for } \frac{1}{\hat{B}(t)} = \left\langle \frac{1}{\hat{B}} \right\rangle \\ \hat{t}' > 1 & \text{ for } \frac{1}{\hat{B}(t)} > \left\langle \frac{1}{\hat{B}} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

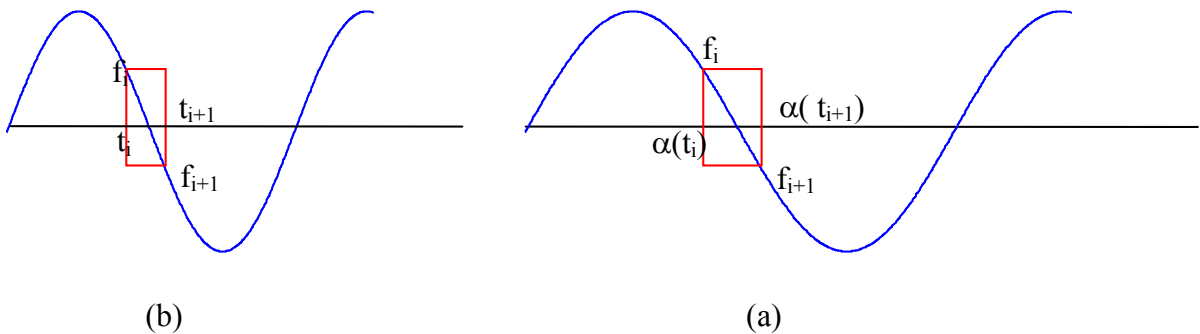
4.2 רוחב הסרט באיטרציה הבאה

רוחב הסרט המקומי משתנה מאיטרציה לאיטרציה בשני היבטים:

- רוחב הסרט הרגעי משתנה כתוצאה מה-scaling.
- נקודות על האות מוסטות (shift) לרגעי זמן אחרים.

השתנות רוחב הסרט המקומי בין האיטרציה ה-n-ית והאיטרציה ה-n+1 מתוארת בנוסחה .4.5

$$B_2(t) = B_1(\alpha(t))\alpha'(t)|_{\alpha(t)} = B_1(\alpha(t)) \frac{\frac{1}{\hat{B}_1(t)}}{\left\langle \frac{1}{\hat{B}_1} \right\rangle} \quad (4.5)$$



איור 4.1 - קטע אות באיטרציה ה-n, ובאיטרציה ה-n+1

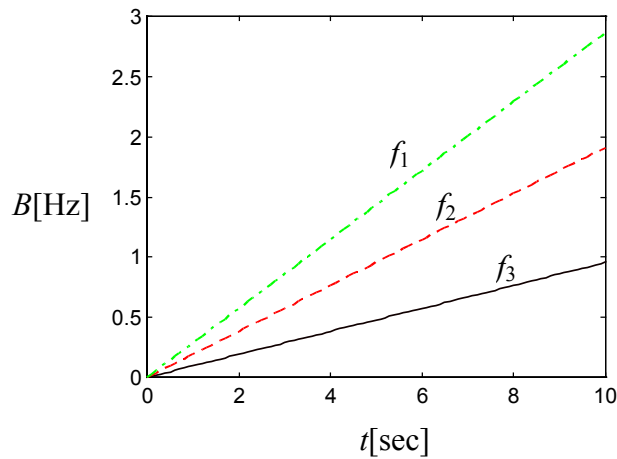
Figure 4.1 - Time segment of the signal in the n-th (a) and the n+1 iteration (b).

4.3 שגיאה בהערכת רוחב הסרט

חוסר ליניאריות של פאזת האות במשך זמן קיום החלון עלול לגרום לשגיאה בשערוך רוחב הסרט המקומי. תופעה זו תודגם להלן עבור אותות מאופנני תדר.

משוואה (4.6) מגדירה שלושה אותות LFM שרוחב הסרט הרגעי שלהם מוצג באיור 4.2, והתמרת פורייה שלהם מוצגת באיור 4.3.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin(0.3t^2) \\ f_2(t) &= \sin(0.6t^2) \\ f_3(t) &= \sin(0.9t^2) \end{aligned} \quad (4.6)$$



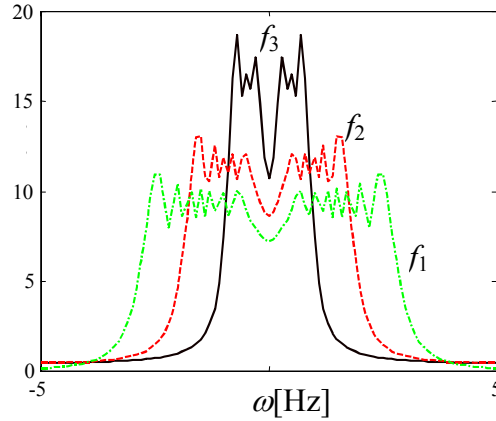
איור 4.2 - שלושה אותות LFM הנבדלים בקצב שינוי התדר.

Figure 4.2 - Three LFM signals varying in the Example of distortion function convergence to its theoretical value.

התמרת פורייה של אותות אלה, (מוצגת באיור 4.3) מושפעת מרכיבי התדר הקיימים בכל רגע בזמן הקיום של החלון. לפיכך לא מייצגת ההתמרה את התדר הרגעי הקיים במרכז החלון, ואשר אותו אנו מעוניינים לשערך, אלא אל כל תחום התדר שנסרק במשך זמן הקיום של החלון.

בהנחת מודל לינארי לשינוי התדר במשך זמן קיום החלון נוכל להעריך את השגיאה הצפויה בשערוך רוחב הסרט בהתבסס על קצב שינוי רוחב הסרט הרגעי ועל רוחב החלון:

$$\hat{B}(t) \cong B(t) + |B'(t)| \frac{T}{2} \quad (4.7)$$



איור 4.3 - התמרת פורייה של שלושת אותות ה-LFM - הסימונים מתייחסים לאיור 4.2.

Figure 4.3 - The Fourier transform of the three LFM signals shown in Figure 2.

עבור אות רציף (לא בהכרח לינארי) במשך החלון מתקיים השוויון:

$$\hat{B}(t) = B(t) + B'(\zeta) \frac{T}{2} \quad (4.8)$$

כאשר ζ היא נקודה זמן במשך קיום החלון:

$$\zeta \in \left[t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2} \right] \quad (4.9)$$

את שגיאת השערוך ניתן לחסום ע"י הנגזרת המכסימלית בקטע:

$$\hat{e}(t) = \hat{B}(t) - B(t) < \frac{T}{2} \max\{|B'(\eta)|\}, \quad \eta \in \left[t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2} \right] \quad (4.10)$$

4.4 אנליזת התכנסות התהליך האיטרטיבי - Monte Carlo

האנליזה בוצעה לבדיקת רובוסטיות התהליך כאשר לשערוך רוחב הסרט המקומי התווסף רעש. הרעש היה נתון כפונקציה זמנית שהסתכמה עם שערוך רוחב הסרט והוגדרה ע"י:

$$e(t) = |B'(t)| \frac{T}{2} (1+r) \quad (4.11)$$

כאשר r הוא משתנה אקראי המפולג אחידות בתחום $-1 < r < +1$. מודל זה מבוסס על שגיאת שערוך רוחב הסרט המתוארת ב-(4.10). רוחב הסרט המשוערך היה איפוא:

$$\hat{B}_n(t) = B_n(t) + e(t) \quad (4.12)$$

לצורך ביצוע השערוך בוצעו 100 ריצות של התהליך האיטרטיבי שכלל 8 איטרציות בכל ריצה כאשר האות הורכב מ-100 דגימות. בכל פעם שחושב רוחב הסרט המקומי מחדש הוא הסתכם עם וקטור רעש שהוכן במיוחד ושייצג את השגיאה האופיינית לשערוך רוחב סרט מקומי עפ"י המודל שתואר לעיל.

דוגמה לקצב ההתכנסות ניתן לראות מתוך הגרף המובא באיור 4.4.



איור 4.4 - מכסימום סטיית התקן בשערוך רוחב הסרט המקומי (מבין כל נקודות האות) שהתקבלה על פני כל הריצות.

Figure 4.4 - Maximal STD of instantaneous bandwidth estimation over the runs.

הגרף באיור 4.4 מציג, לכל איטרציה, את הערך המכסימלי של סטיית התקן (סטטיסטיקה של כל נקודות האות) שהתקבלה על פני כל הריצות. האות במקרה זה היה אות chirp.

על מנת לבדוק את התכנסות התהליך לאותות שהשתנום (בזמן) היא בעלת אופי שונה בוצע שערך מונטה קרלו גם על אות שפונקצית עיוות ציר הזמן שלו היא בעלת אופי מרקובי, כלומר כל דגימה של פונקצית העיוות $\gamma(n)$ מחושבת כסכום ממושקל בין הדגימה הקודמת $\gamma(n-1)$ לדגימת רעש $w(n)$:

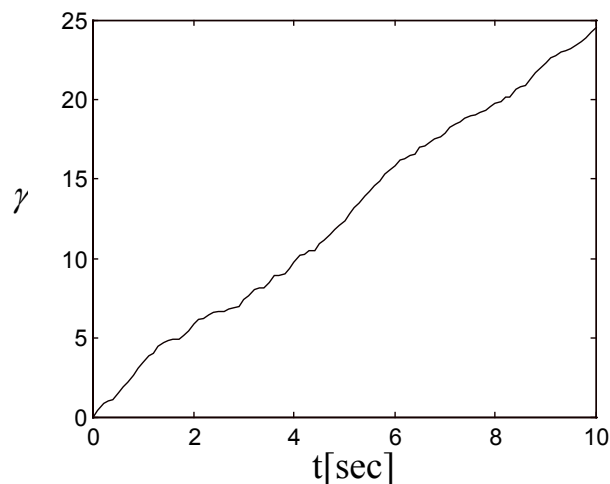
$$\gamma(n) = \gamma(n-1) + w(n) \quad (4.13)$$

מאופי הגדרת פונקצית עיוות ציר זמן מרקובית ברור כי רוחב הסרט המקומי הוא למעשה דגימות רעש בלתי תלויות. הגבלנו את הרעש המוגרל להיות אי-שלילי, לצורך מניעת מצב בו רוחב הסרט המקומי מקבל ערכים שליליים.

פונקצית עיוות ציר זמן מרקובית לדוגמה מוצגת באיור 4.5. בדוגמה זו $w(n)$ מפולג אחיד בתחום $[0,0.5]$.

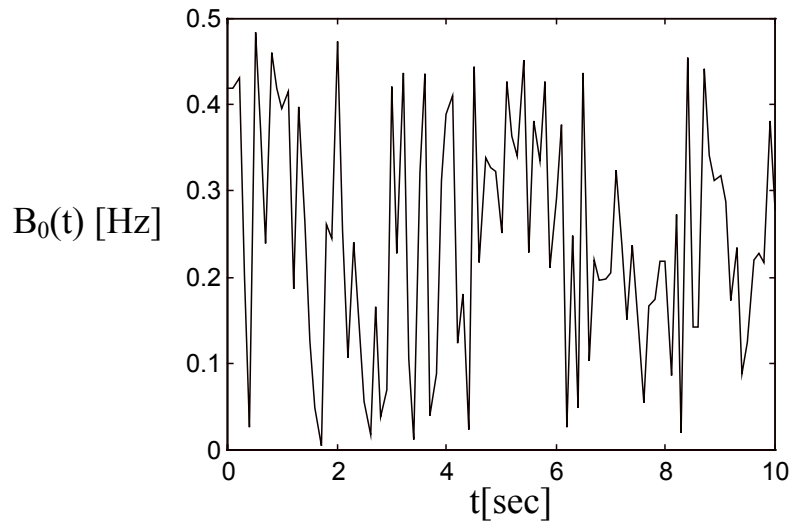
רוחב הסרט המקומי של האות מוצג באיור 4.6.

דוגמה לקצב ההתכנסות של אותות מהצורה הזו ניתן לראות בגרף המובא באיור 4.7. גרף זה מציג, לכל איטרציה, את הערך המכסימלי של סטיית התקן שהתקבלה על פני כל הריצות.



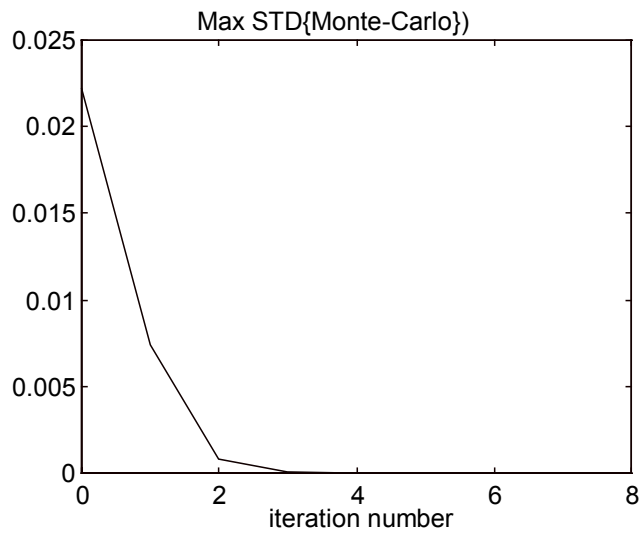
איור 4.5 - פונקצית עיוות ציר זמן מרקובית.

Figure 4.5 - Markovian time distortion function.



איור 4.6 - רוחב סרט מקומי בתחילת התהליך.

Figure 4.6 - Instantaneous bandwidth at the beginning of the process.



איור 4.7 - מכסימום סטיית התקן בשערוך רוחב הסרט המקומי (מבין כל נקודות האות) שהתקבלה על פני כל הריצות.

Figure 4.7 - Maximal STD of instantaneous bandwidth estimation over the runs.

4.5 הסבר השגיאה משיקולי סטציונריות

בתחילת התהליך לא מתקיימת סטציונריות אפילו במשך הקיום של חלון ההסתכלות המשמש להערכת רוחב הסרט. עובדה זו גורמת לשגיאה בהערכת רוחב הסרט המקומי כתוצאה מהיכללות של רכיבי תדר שאינם קיימים ברגע מרכז החלון אולם כתוצאה מאורכו הארוך של החלון ביחס לקצב השתנות האות.

נשתמש כעת בניסוח שהובא ע"י Poletti [14] ונוסח לפניו ע"י Rihaczek [16] להגדרת זמן הרלקסציה של אות. נתבונן באות מהצורה:

$$s(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (4.14)$$

נתעלם כעת מהשינוי באמפליטודה ונבצע הרחבה מקומית של הפאזה תוך התחשבות בשני האיברים הראשונים של טור טיילור:

$$s(t + \tau) = a(t + \tau)e^{j\phi(t+\tau)} \approx a(t)e^{j\phi(t)} e^{j\left[\phi'(t)\tau + \frac{\phi''(t)}{2}\tau^2\right]} \quad (4.15)$$

Rihaczek [16] הגדיר את זמן הרלקסציה כמשך הזמן שבו הפאזה בקירוב קבועה. בהרשותו סטייה מלינאריות של $\pi/4$, התקבל כי זמן הרלקסציה:

$$T_r = \sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(t)|}} \quad (4.16)$$

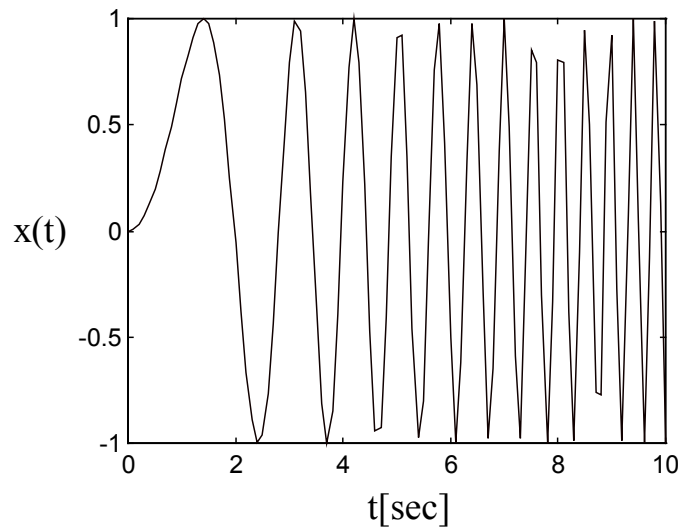
כשהתהליך האיטרטיבי מתקרב לסיומו, השתנות רוחב הסרט המקומי של האות מתונה יותר. במצב זה משתפרת משמעותית איכות שערך התדר המקומי של האות.

פרק 5 דוגמאות

5.1 פונקצית אפנון בעלת השתנות ריבועית (chirp)

בדוגמה להלן מוצגת פעולת התהליך האיטרטיבי, שכלל 8 איטרציות, על אות ה-chirp (אות בעל השתנות פאזה מסדר שני), כמוראה באיור 5.1:

$$x(t) = \sin(0.8 \cdot t^2) \quad t \in [0,10] \quad (5.1)$$



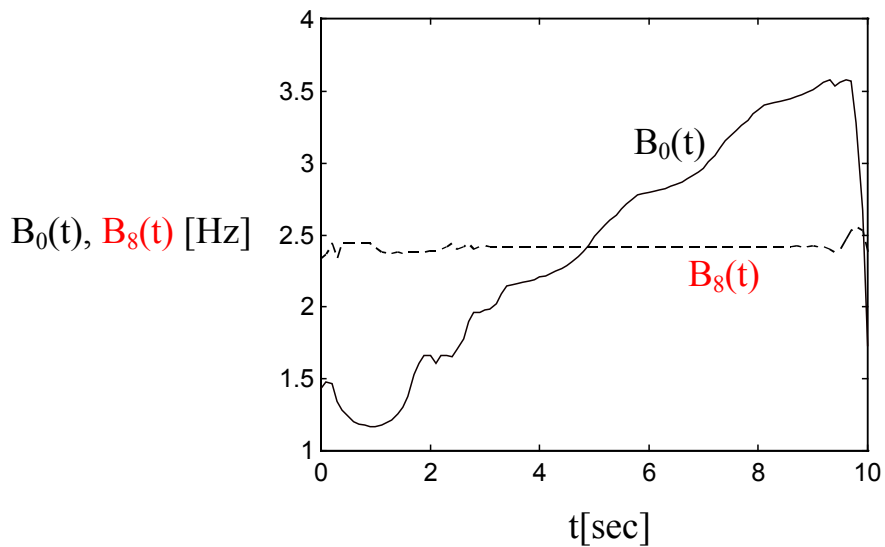
איור 5.1 - אות chirp מהצורה: $x(t) = \sin(0.8 \cdot t^2) \quad t \in [0,10]$

Figure 5.1 - Chirp signal of the form: $x(t) = \sin(0.8 \cdot t^2) \quad t \in [0,10]$.

רוחב הסרט המקומי של האות חושב ע"י חישוב STFT באמצעות חלון גאוזי סביב כל אחת מנקודות האות, כמוראה באיור 5.2.

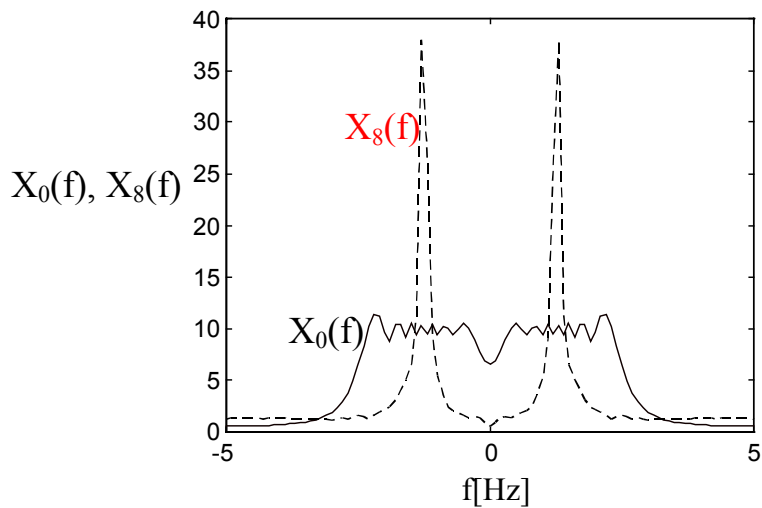
איור 5.3 מציג את התמרת פורייה (הגלובלית) של האות.

באיור איור 5.4 מוצגת תוצאת שערך פונקצית העיוות של האות מוצגת ומושויית לפונקצית העיוות המקורית (פונקצית האפנון) שיצרה את האות.



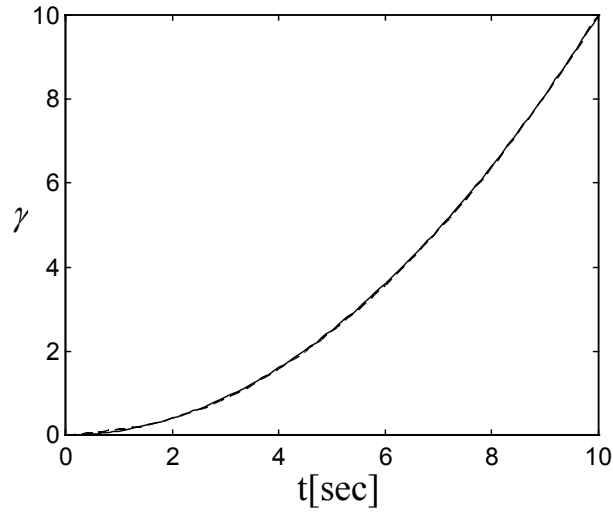
איור 5.2 - רוחב סרט מקומי בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).

Figure 5.2 - Initial (solid) and final (dashed) instantaneous bandwidth.



איור 5.3 - התמרת פורייה של האות בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).

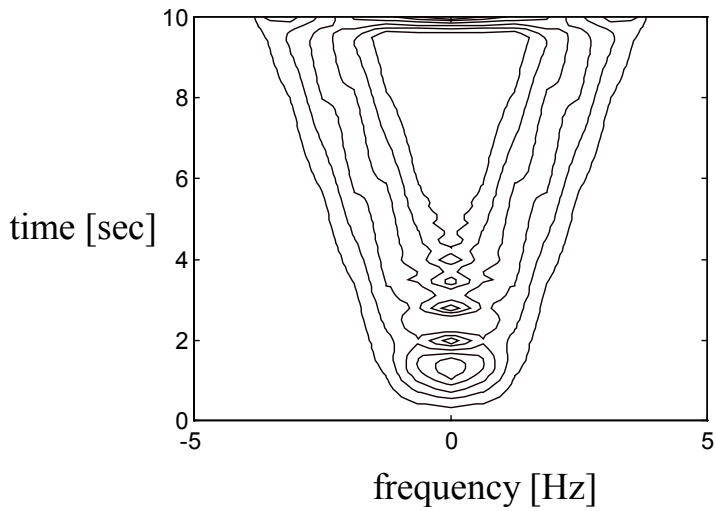
Figure 5.3 - Initial (solid) and final (dashed) Fourier transform.



איור 5.4 - פונקצית עיוות ציר הזמן - ערך תיאורטי (רציף) ושערך (מקווקו).

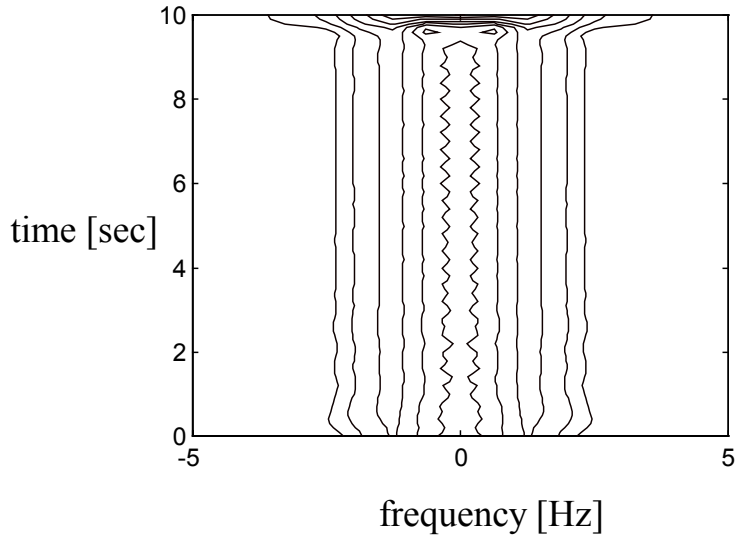
Figure 5.4 - Time distortion function - theoretical (solid) and estimated (dashed).

איורים 5.5 ו-5.6 - מציגים בהתאמה את פילוג הזמן תדר של האות הנתון ושל האות מוגבל הסרט המתקבל בסיום התהליך.



איור 5.5 - פילוג זמן-תדר של האות המקורי (STFT).

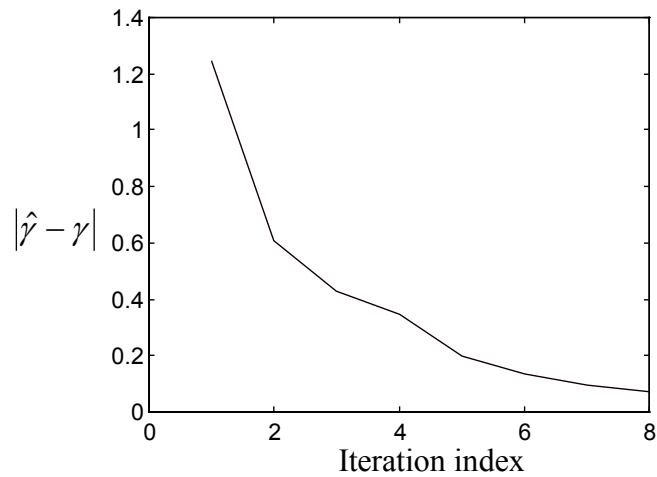
Figure 5.5 - Time-frequency distribution of the original signal (STFT).



איור 5.6 - פילוג זמן-תדר של האות המתקבל בסיום התהליך (STFT).

Figure 5.6 - Time-frequency distribution of the final signal (STFT).

איור 5.7 נותן איטואיזיה לגבי קצב התכנסות התהליך ע"י חישוב השגיאה בשערוך פונקציה העיוות בכל אחד משלבי התהליך האיטרטיבי.



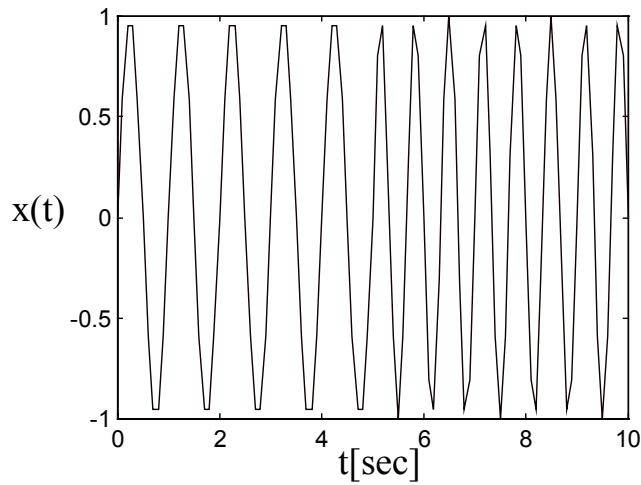
איור 5.7 - ההפרש הממוצע בין פונקציה העיוות המקורית לערכה המשוערך מידי איטרציה.

Figure 5.7 - Average difference between the original distortion function and its estimate for each iteration.

5.2 פונקצית סינוס בתדר משתנה

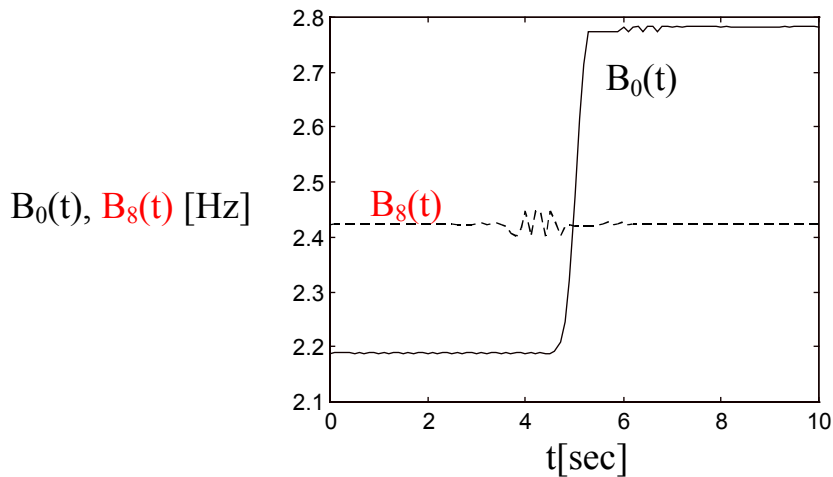
בדוגמה להלן מוצגת פעולת התהליך האיטרטיבי, שכלל 8 איטרציות, על אות סינוס בתדר שאינו קבוע (קפיצת תדר באמצע האינטרוול):

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t) & t \in [0,5] \\ \sin(3\pi t) & t \in (5,10] \end{cases} \quad (5.2)$$



איור 5.8 - האות בציר הזמן.

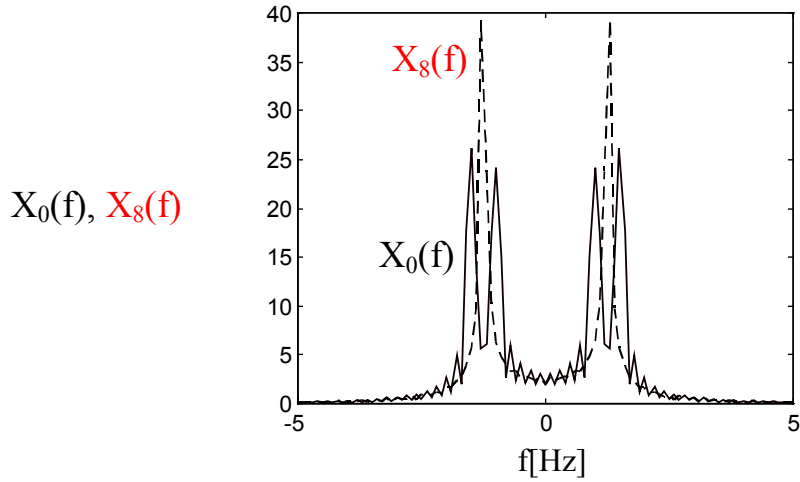
Figure 5.8 - The signal in time domain.



איור 5.9 - רוחב סרט מקומי בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).

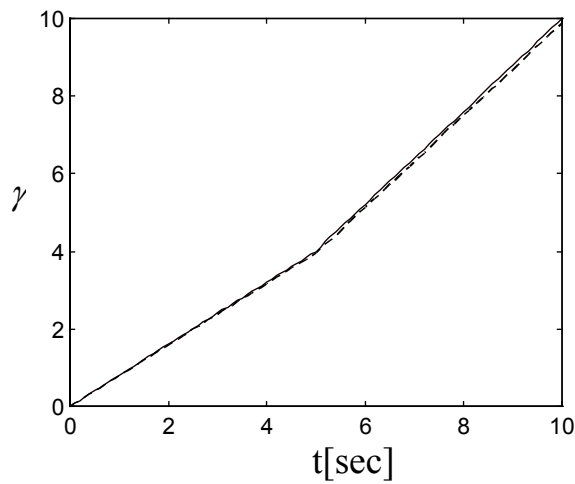
Figure 5.9 - Initial (solid) and final (dashed) instantaneous bandwidth.

באיור 5.10 המציג את התמרת פורייה (הגלובלית) של האות ניתן לראות את תדרי הסינוס שהיו קיימים באות המקורי (כל אחד במשך מחצית מזמן הקיום של האות). באות הסופי שהתקבל בסינוס התהליך קיים למעשה תדר קבוע.



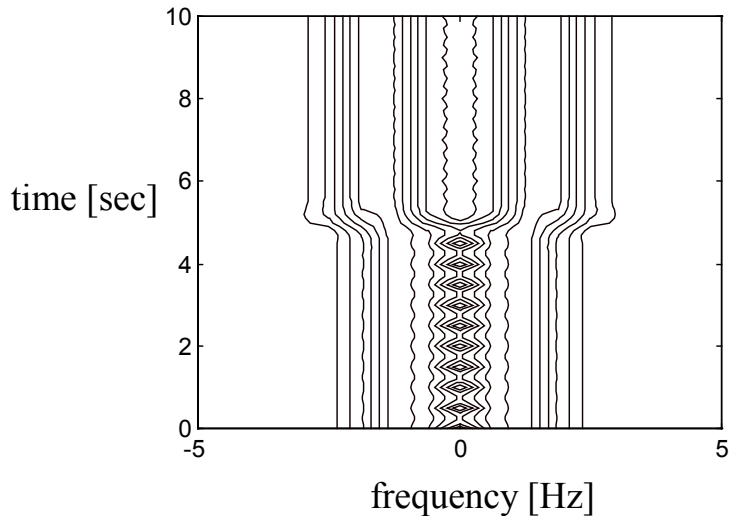
איור 5.10 - התמרת פורייה של האות בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).

Figure 5.10 - Initial (solid) and final (dashed) Fourier transform.



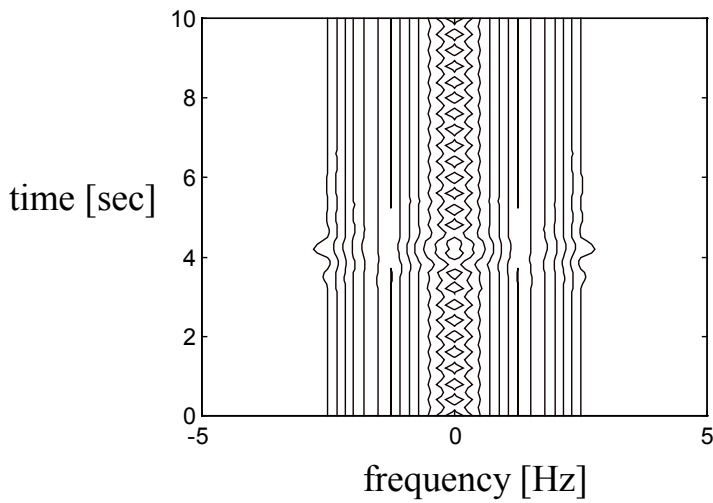
איור 5.11 - פונקצית עיוות ציר הזמן - ערך תיאורטי (רציף) ושערוד (מקווקו).

Figure 5.11 - Time distortion function - theoretical (solid) and estimated (dashed).



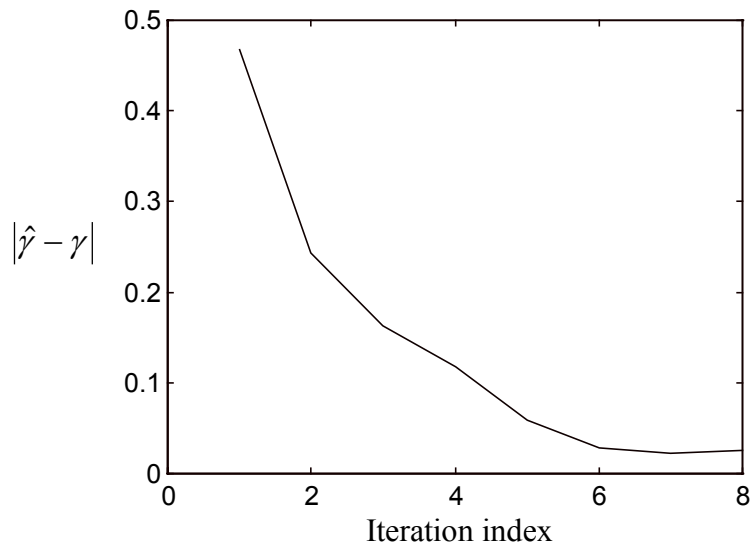
איור 5.12 - פילוג זמן-תדר של האות המקורי (STFT).

Figure 5.12 - Time-frequency distribution of the original signal (STFT).



איור 5.13 - פילוג זמן-תדר של האות המתקבל בסיום התהליך (STFT).

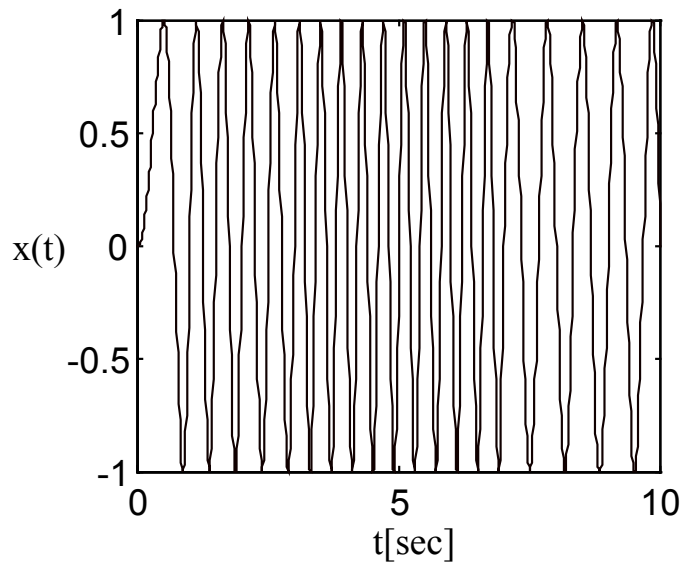
Figure 5.13 - Time-frequency distribution of the final signal (STFT).



איור 5.14 - ההפרש הממוצע בין פונקציות העיוות המקורית לערכה המשוערך מידי איטרציה.
Figure 5.14 - Average difference between the original distortion function and its estimate for each iteration.

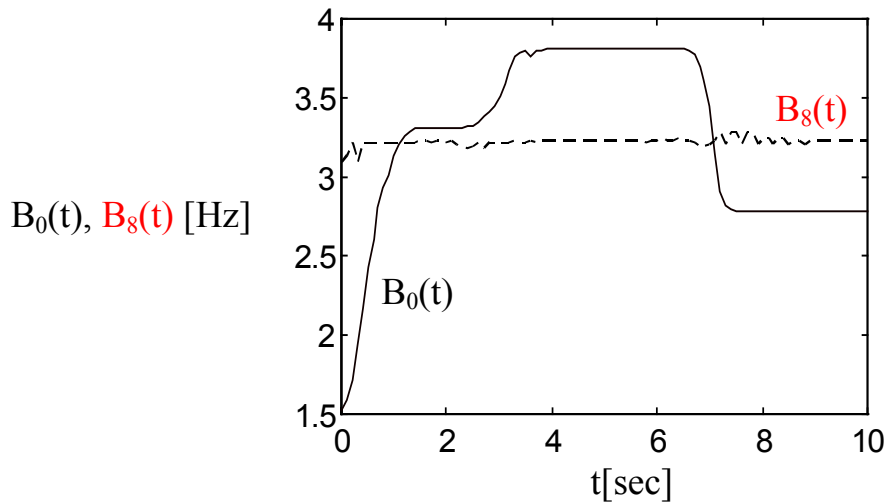
5.3 אות מעורב

בדוגמה להלן מוצגת פעולת התהליך האיטרטיבי, שכלל 8 איטרציות, על אות מעורב שנוצר ממספר סגמנטים שכללו אפנון chirp וסינוסים במספר תדרים. האות המעורב בציר הזמן מוצג באיור 5.14.



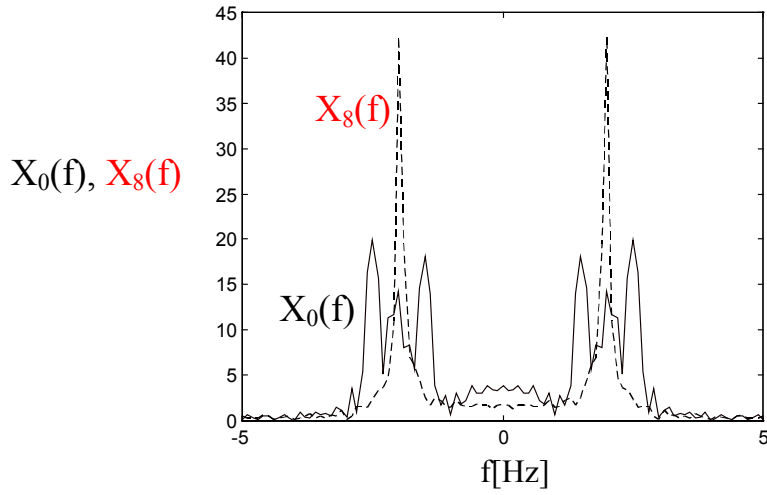
איור 5.15 - האות בציר הזמן.

Figure 5.15 - The signal in time domain.

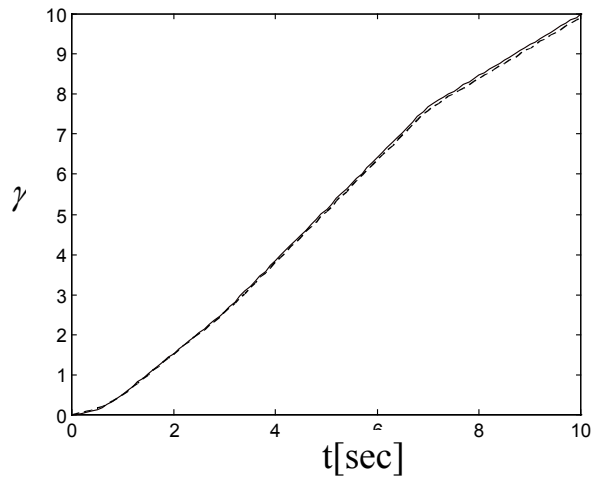


איור 5.16 - רוחב סרט מקומי בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).

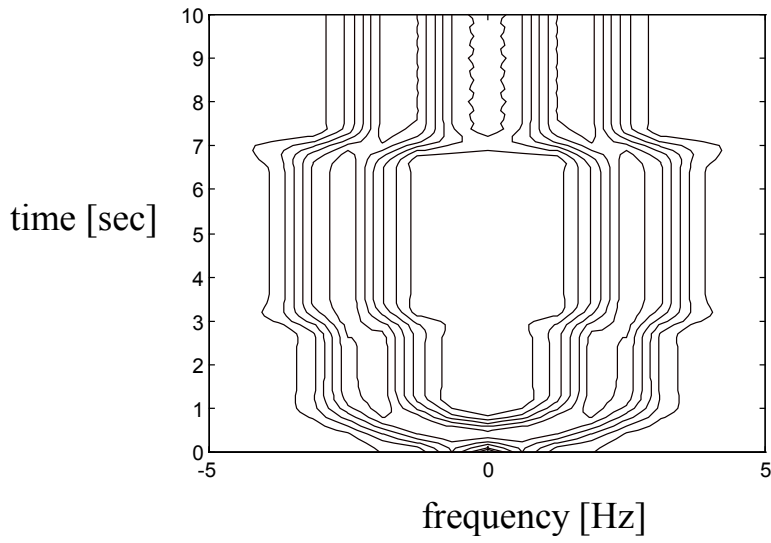
Figure 5.16 - Initial (solid) and final (dashed) instantaneous bandwidth.



איור 5.17 - התמרת פורייה של האות בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).
Figure 5.17 - Initial (solid) and final (dashed) Fourier transform.

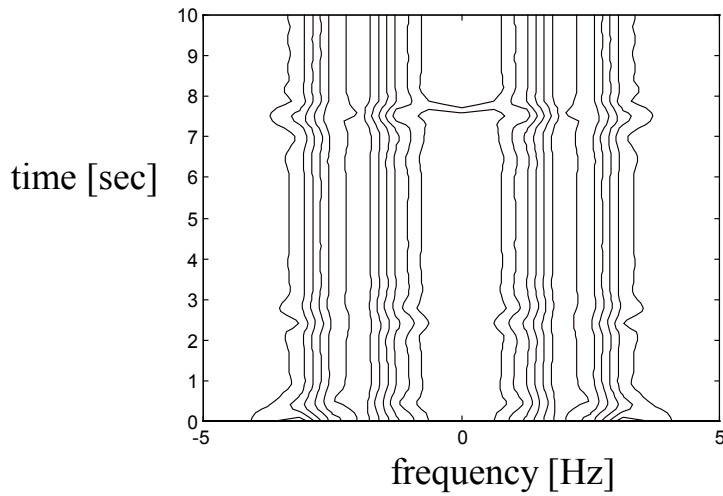


איור 5.18 - פונקצית עיוות ציר הזמן - ערך תיאורטי (רציף) ושערוך (מקווקו).
Figure 5.18 - Time distortion function - theoretical (solid) and estimated (dashed).



איור 5.19 - פילוג זמן-תדר של האות המקורי (STFT).

Figure 5.19 - Time-frequency distribution of the original signal (STFT).

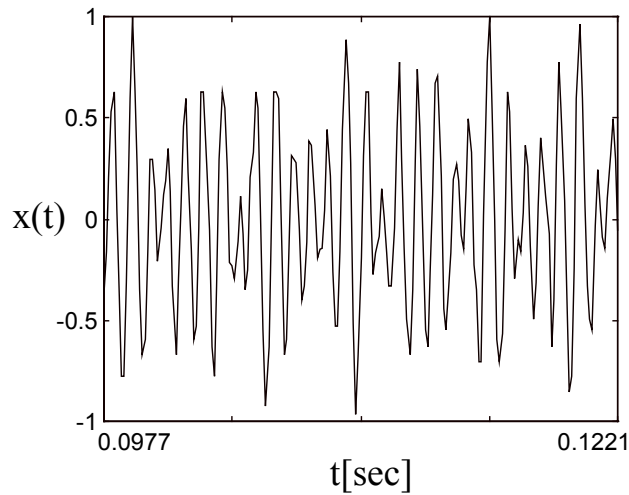


איור 5.20 - פילוג זמן-תדר של האות המתקבל בסיום התהליך (STFT).

Figure 5.20 - Time-frequency distribution of the final signal (STFT).

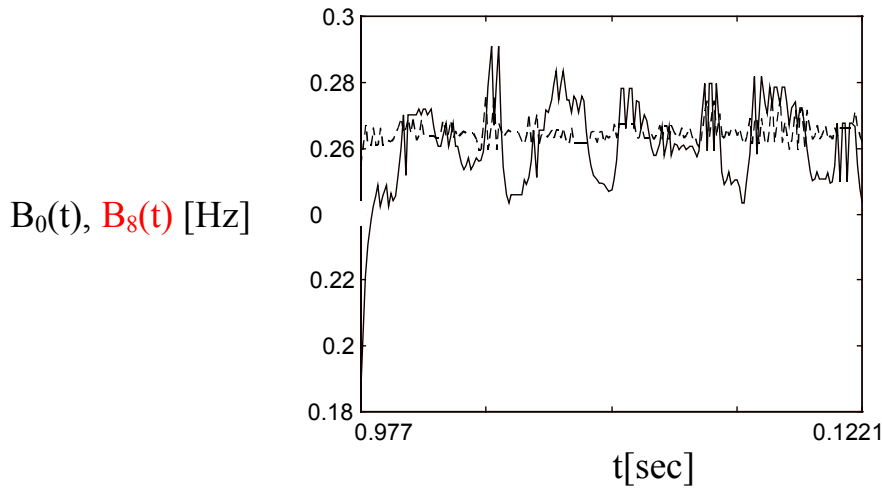
5.4 אות שמע

בדוגמה להלן מוצגת פעולת התהליך האיטרטיבי, שכלל 8 איטרציות, על קטע מאות שמע (train) שנלקח מספריית הצלילים של ה-MATLAB toolbox של תכנת MATLAB. קטע אות השמע בציר הזמן מוצג באיור 5.20.



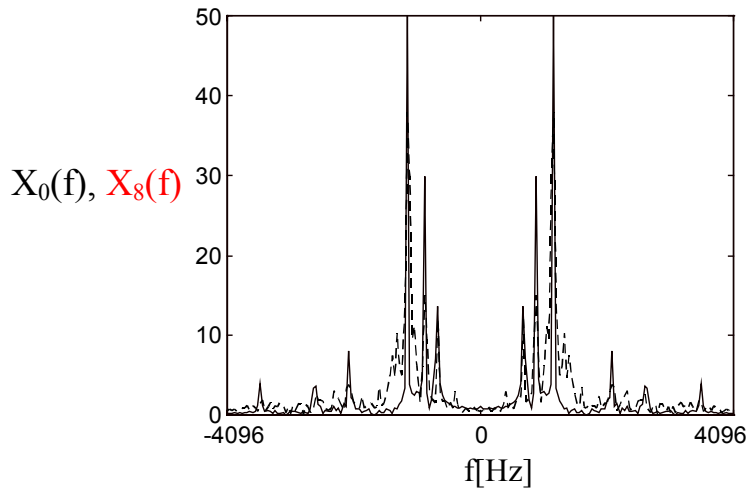
איור 5.21 - האות בציר הזמן.

Figure 5.21 - The signal in time domain.

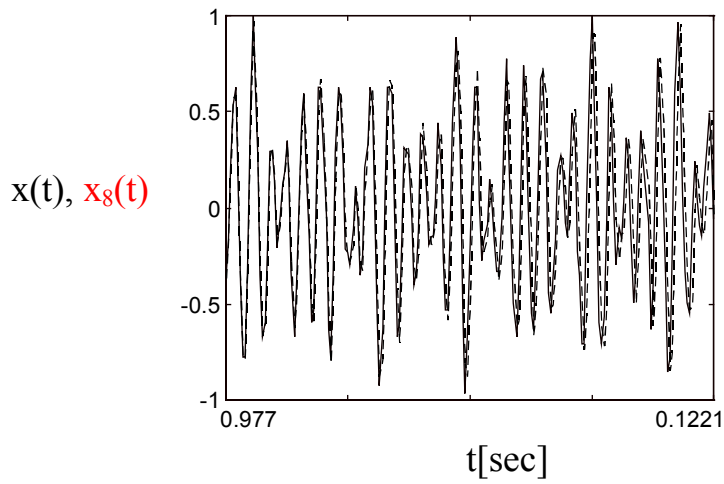


איור 5.22 - רוחב סרט מקומי בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).

Figure 5.22 - Initial (solid) and final (dashed) instantaneous bandwidth.



איור 5.23 - התמרת פורייה של האות בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).
Figure 5.23 - Initial (solid) and final (dashed) Fourier transform.



איור 5.24 - האות המקורי (רציף) והאות המשוחזר (מקווקו).
Figure 5.24 - Original (solid) and reconstructed (dashed) signal.

פרק 6

פרמטרים המשפיעים על התהליך האיטרטיבי

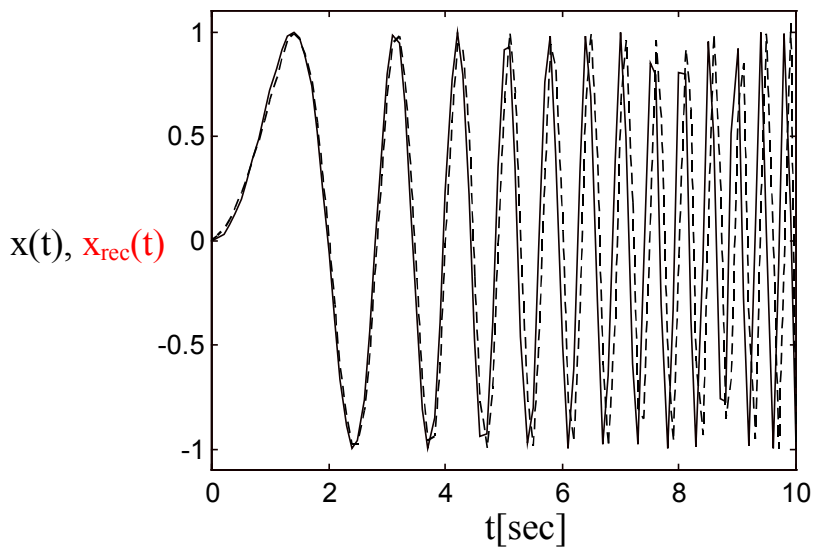
6.1 השפעת רוחב החלון על התהליך האיטרטיבי

בהמשך למודל שהוצג בסעיף 4.5 לתיאור השגיאה בהערכת רוחב הסרט ננסה להדגים את השפעת רוחב החלון על שערך רוחב הסרט המקומי מידי איטרציה בפרט ועל התכנסות התהליך האיטרטיבי בכלל.

הטיפול באות:

$$x(t) = \sin(0.8 \cdot t^2) \quad t \in [0,10] \quad (6.1)$$

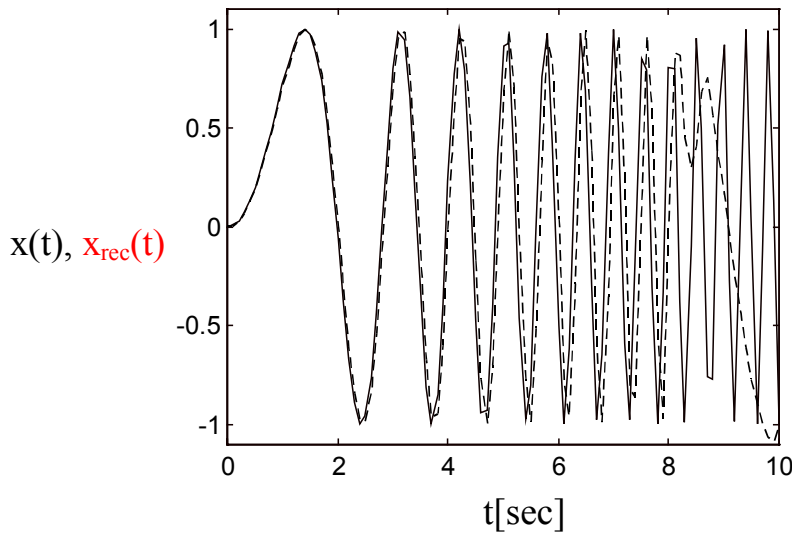
הדגום במרווחים של 0.1 בוצע באמצעות חלון גאوسی שרוחבו שונה מספר פעמים. חלון ברוחב 17 דגימות איפשר לשחזר את כל האות, כמראה באיור 6.1.



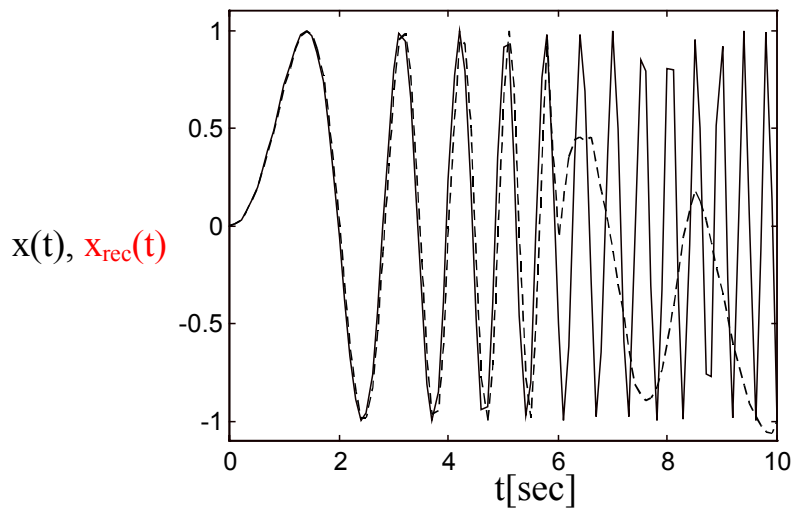
איור 6.1 - אות chirp: $x(t) = \sin(0.8 \cdot t^2)$ (רציף) והאות המשוחזר בסיום התהליך (מקווקו) - שימוש בחלון ברוחב 17 דגימות.

Figure 6.1 - The chirp signal $x(t) = \sin(0.8 \cdot t^2)$ (solid) and the reconstructed signal at the end of the process (dashed) using a window of 17 samples.

מביצוע התהליך פעמים נוספות ברוחב חלון הולך וגדל רואים כי הגדלת החלון מעבר לסף מסוים מפריעה להתכנסות התהליך. לדוגמה שימוש ברוחבי חלון גדולים יותר של 21 ו-25 דגימות מאפשרים לעקוב אחר השינויים ברוחב הסרט רק עד לנקודה מסוימת באות, כמוראה באיורים 6.2 ו-6.3 בהתאמה.



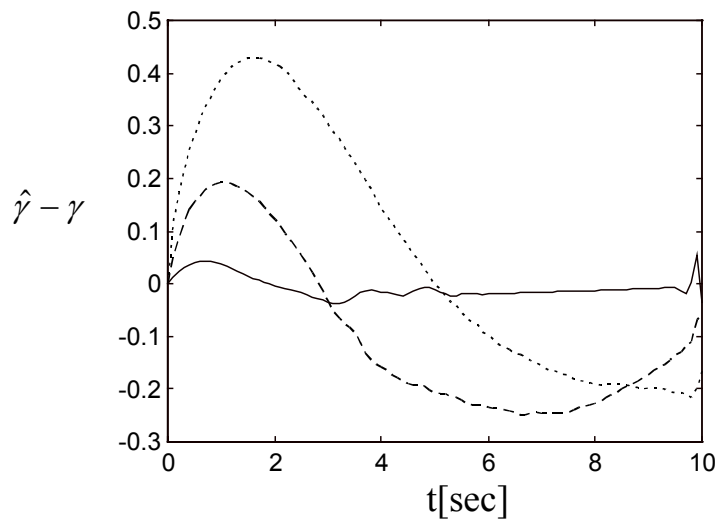
איור 6.2 - אות מקורי (רציף) והאות המשוחזר בסיום (מקווקו) - חלון ברוחב 21 דגימות.
Figure 6.2 - Original signal (solid) and reconstructed signal at the end of the process (dashed) using a window of 21 samples.



איור 6.3 - אות מקורי (רציף) והאות המשוחזר בסיום (מקווקו) - חלון ברוחב 25 דגימות.
Figure 6.3 - Original signal (solid) and reconstructed signal at the end of the process (dashed) using a window of 25 samples.

הרווח מהגדלת רוחב החלון אמור להתבטא ברזולוציה משופרת בתחום התדר עפ"י עיקרון אי-הוודאות [17]. בפועל, עקב השתנות האות בזמן קיום החלון לא משתלם להרחיב את גודל החלון מעבר לנקודה מסוימת וזאת עקב אובדן היכולת לעקוב אחר רוחב הסרט בנקודה שסביבה ממורכז החלון.

נמשיך ונבחן את השפעת הקטנת רוחב החלון על הצלחת התהליך. הקטנת רוחב החלון מקלקלת את הרזולוציה בתדר ובכך פוגעת באיכות בשערוך רוחב הסרט המקומי. איור 6.4 מציג את השגיאה בפונקציית העיוות לאחר 8 איטרציות עבור רוחבי חלון של 5, 9 ו-17 דגימות. מהגרף ניכר כי הגדלת רוחב החלון משפרת את הדיוק המתקבל בשערוך פונקציית העיוות.



איור 6.4 - השגיאה בשערוך פונקציית העיוות γ עבור חלון ברוחב 5 דגימות (מנוקד), 9 דגימות (מקווקו) ו-17 דגימות (רציף).

Figure 6.4 - γ estimation error for window with 5 samples (dotted), 9 samples (dashed) and 17 samples (solid).

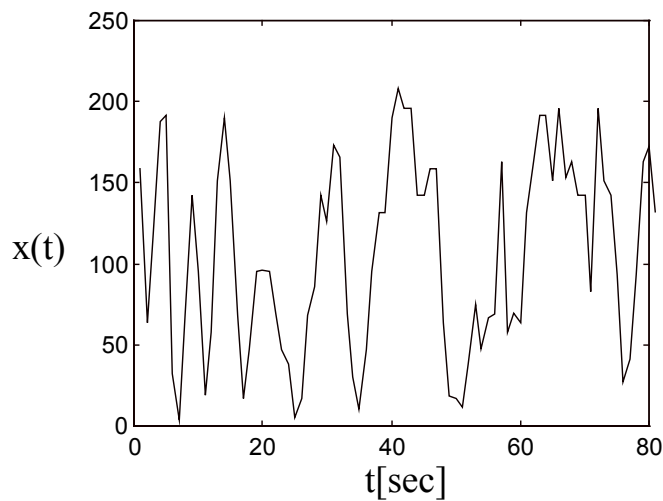
ראינו אם כן כי לקביעה מושכלת של גודל החלון השפעה קרדינלית על הצלחת התהליך ויכולתו להתכנס. האפשרות לשפר את דיוק השערוך ע"י הגדלת רוחב החלון טומנת בחובה סיכון להתכנסות התהליך. מומלץ לשנות את רוחב החלון בין האיטרציות כאשר בתחילת התהליך יעשה שימוש בחלון קטן שיאפשר לעקוב אחר השינויים ברוחב הסרט, ולבחור ברוחב חלון גדול יותר בשלבים מתקדמים יותר לקראת התכנסות פונקציית העיוות על מנת לשפר את השערוך.

6.2 רוחב סרט האות הנתון - הדגמה ע"י אות וידאו

רובם המכריע של האותות הנתונים באופן נומרי מיוצגים בצורה בדידה באמצעות דגימה. כאשר נדגמות תמונות נתונות ברזולוציה מסוימת, עלול קצב הדגימה (נמצא ביחס הפוך למרווח בין פיקסלים בתמונה הדגומה) להיות נמוך מהנדרש על מנת לקיים את תנאי נייקוויסט.

התהליך שהוצג בפרקים הקודמים של עבודה זו מאפשר לשערך את פונקצית עיוות ציר הזמן של אותות הנתונים באופן רציף, ולכן ערכם ידוע בכל נקודה. ביצוע התהליך באופן מדויק למדי מתאפשר גם כאשר האות הנתון דגום בקצב גבוה ביחס לתכולה הספקטרלית שלו.

בעיה מתעוררת כאשר האות הנתון בצורה בדידה נדגם בקצב נמוך מהנדרש עפ"י תנאי נייקוויסט. נתבונן בקטע חד מימדי הלקוח מתמונת Mandrill (נמצאת ב-Toolbox של תכנת Matlab). קטע האות מוצג באיור 6.5.

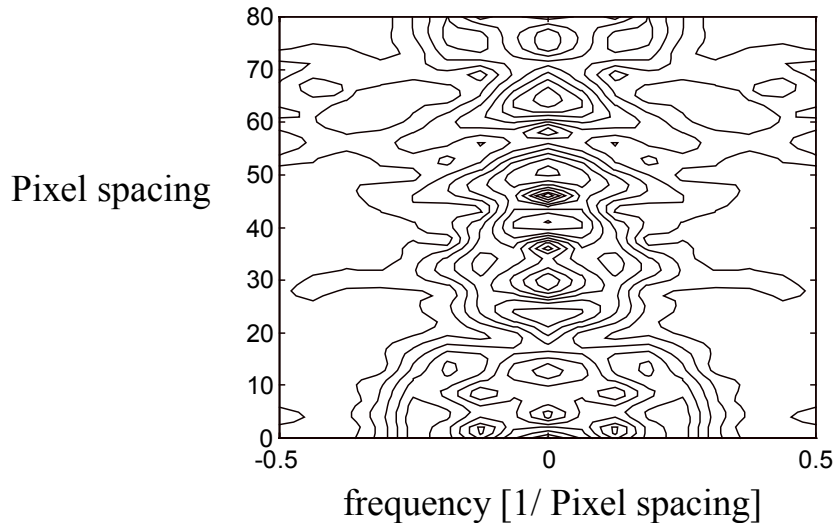


איור 6.5 - קטע חד מימדי הלקוח מתמונת "Mandrill".

Figure 6.5 - A one dimensional part of "Mandrill" image.

נתבונן בפילוג הזמן-תדר (STFT) של אות זה, המופיע באיור 6.6. מהתבוננות בפילוג ניתן לראות כי קצב הדגימה של האות נמוך ביחס לרוחב הסרט שלו. כתוצאה מכך לא נוכל לשערך בצורה אמינה את רוחב הסרט של האות הדגום, בגלל הקיפולים (aliasing) המתרחשים עקב

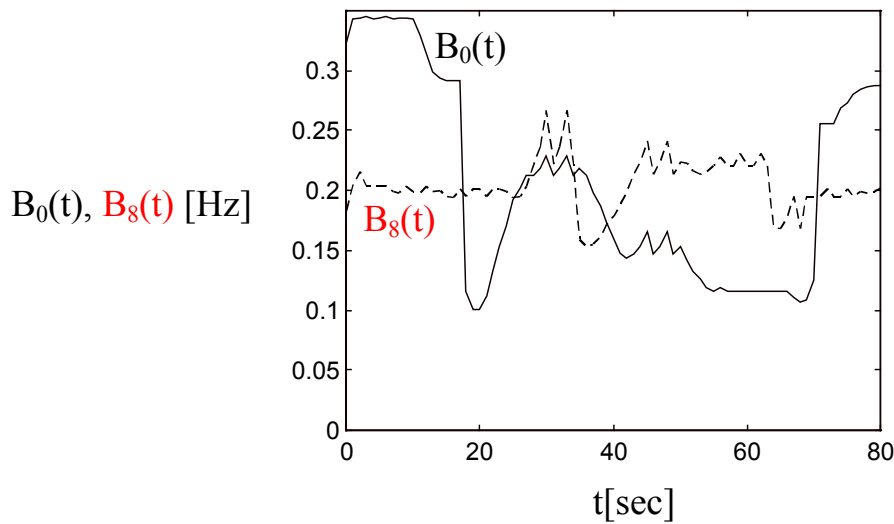
דגימה בקצב נמוך מדי. שערך שגוי של רוחב הסרט המקומי משבש את שערך פונקצית העיוות ומפריע להתכנסות התהליך.



איור 6.6 - פילוג זמן-תדר של האות המקורי (STFT).

Figure 6.6 - Time-frequency distribution of the original signal (STFT).

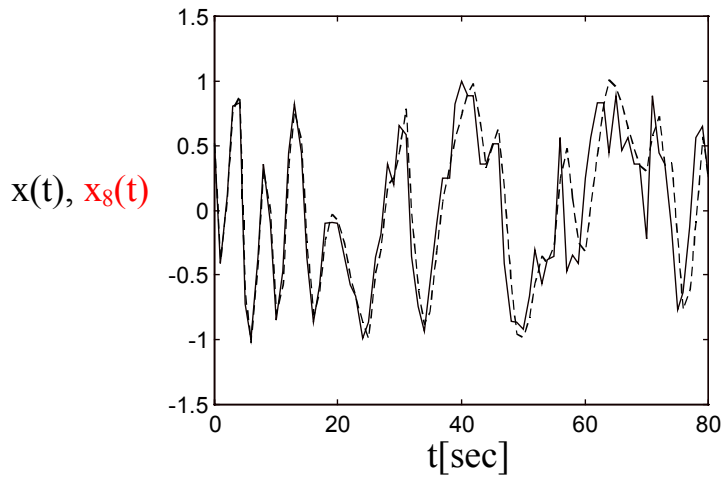
איור 6.7. מציג את רוחב הסרט הרגעי של האות, בתחילת התהליך האיטרטיבי (8 איטרציות) ובסופו.



איור 6.7 - רוחב סרט מקומי בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).

Figure 6.7 - Initial (solid) and final (dashed) instantaneous bandwidth.

איור 6.8 מציג את האות המקורי ואת האות המשוחזר לאחר ביצוע התהליך.



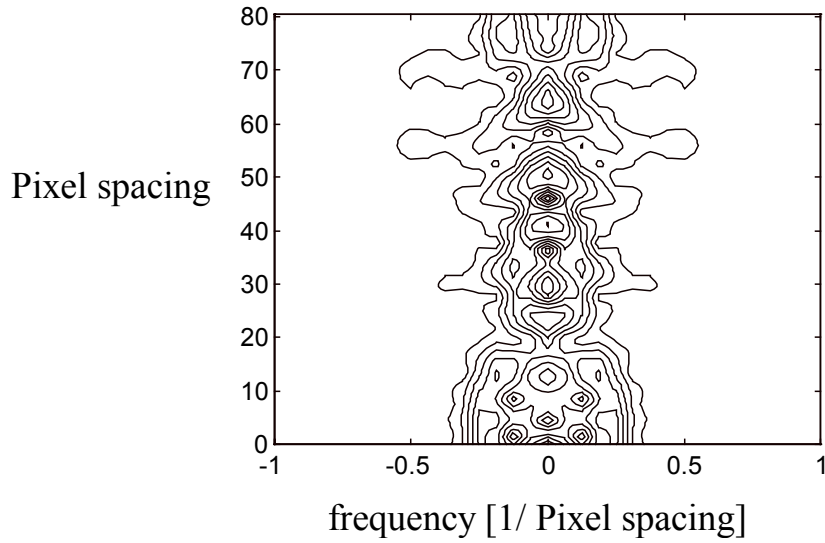
איור 6.8 - האות המקורי (רציף) והאות המשוחזר (מקווקו) - ללא DC.
Figure 6.8 - Original (solid) and reconstructed (dashed) signal.

מאחר שהאות כבר נתון בצורה בדידה, אין באפשרותנו להגדיל את קצב הדגימה המקורי ובכך לשפר את הצלחת התהליך. עם זאת, אנו יכולים לבצע אינטרפולציה לאות הדגום הנתון. בכך, למרות שלא הוספנו אינפורמציה לגבי האות, אנו מאפשרים שערך מדויק יותר של פונקציית העיוות.

איור 6.9 המציג את פילוג הזמן-תדר (STFT) של אותו האות, לאחר ביצוע אינטרפולציה בפקטור 2.

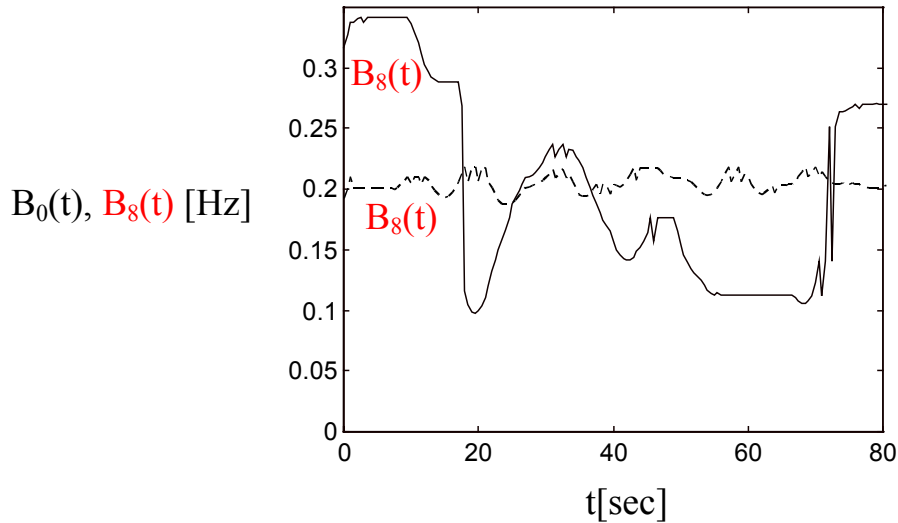
איור 6.10 מציג את רוחב הסרט הרגעי של האות (לאחר ביצוע אינטרפולציה בפקטור 2), בתחילת התהליך האיטרטיבי (8 איטרציות) ובסופו.

איור 6.11 מציג את האות המקורי ואת האות המשוחזר לאחר ביצוע התהליך.

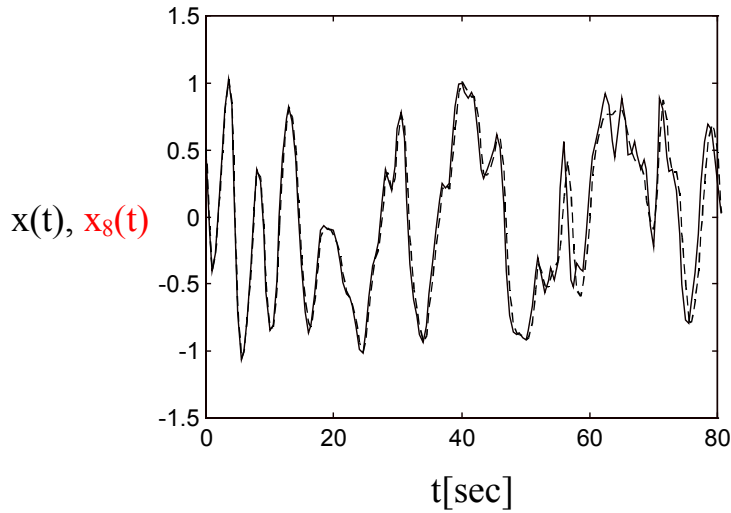


איור 6.9 - פילוג זמן-תדר של האות המקורי לאחר ביצוע אינטרפולציה (STFT).
Figure 6.9 - Time-frequency distribution of the interpolated signal (STFT).

מהשוואת איור 6.10 עם איור 6.7 ואיור 6.11 עם איור 6.8 ניתן לראות כי שערך פונקצית העיוות השתפר כתוצאה מביצוע האינטרפולציה, כמו גם הדיוק בשחזור האות לאחר ביצוע התהליך.



איור 6.10 - רוחב סרט מקומי בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).
Figure 6.10 - Initial (solid) and final (dashed) instantaneous bandwidth.



איור 6.11 - האות המקורי (רציף) והאות המשוחזר (מקווקו) - ללא DC.
Figure 6.11 - Original (solid) and reconstructed (dashed) signal.

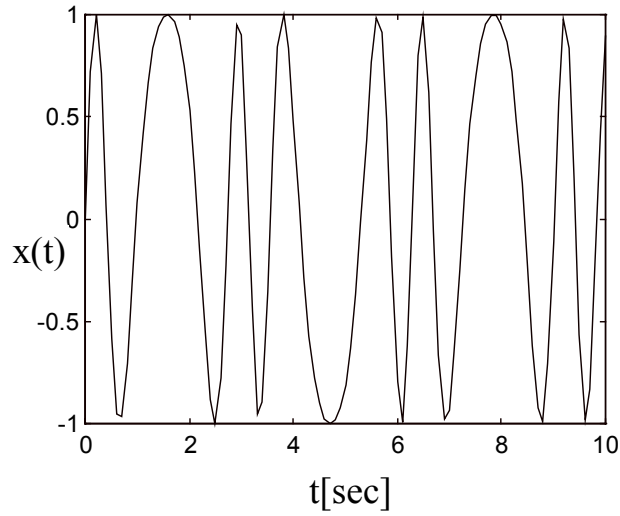
הבעיה שהוצגה לעיל מונעת, במקרים רבים את האפשרות לטפל באותות בדידים וזאת עקב קצב הדגימה הנמוך שבו נדגמו. על מנת לאפשר את הצלחת התהליך נדרש לקבל אות רציף או לפחות אות הדגום באופן מהיר (לפחות בקצב נייקוויסט).

6.3 הדגמת השפעת רוחב סרט האות הנתון - אות אנליטי

בדוגמה להלן מוצגת פעולת התהליך האיטרטיבי, שכלל 8 איטרציות, על אות FM כמוראה באיור 6.12:

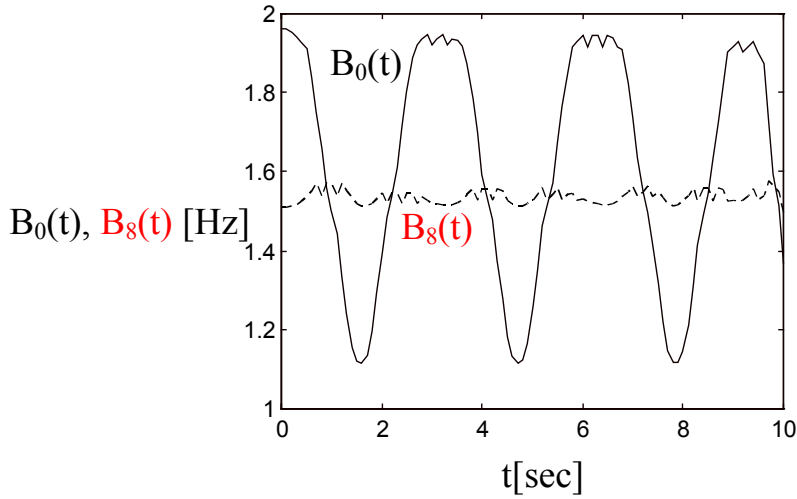
$$x(t) = \sin(5t + \sin(2t)) \quad t \in [0,10] \quad (6.2)$$

גם במקרה זה חושב רוחב הסרט המקומי של האות חושב ע"י חישוב STFT באמצעות חלון גאوسی סביב כל אחת מנקודות האות, כמוראה באיור 6.12.



איור 6.12 - אות FM מהצורה: $x(t) = \sin(5t + \sin(2t))$ $t \in [0,10]$

Figure 6.12 - An FM signal of the form: $x(t) = \sin(5t + \sin(2t))$ $t \in [0,10]$.

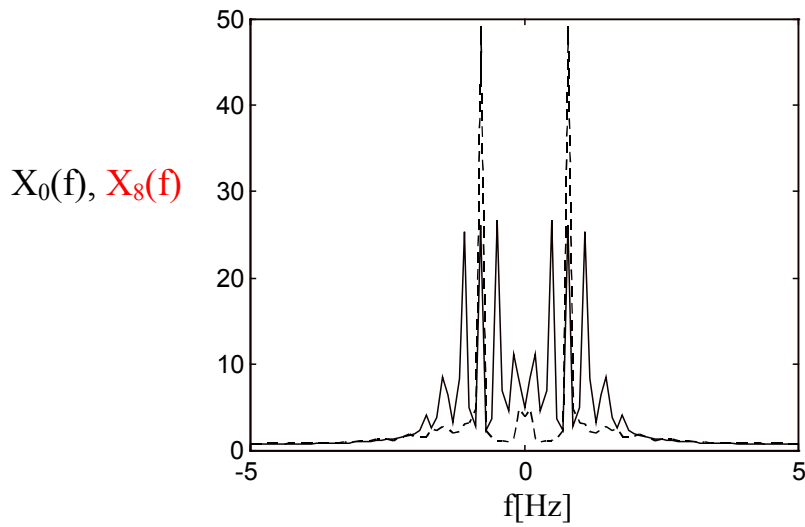


איור 6.13 - רוחב סרט מקומי בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).

Figure 6.13 - Initial (solid) and final (dashed) instantaneous bandwidth.

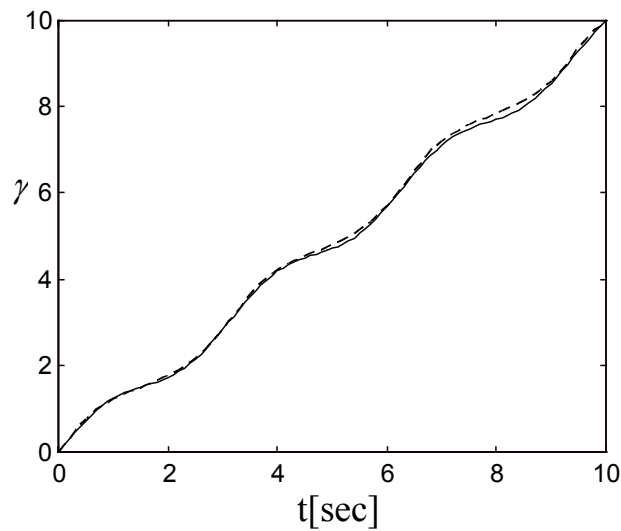
איור 6.14 מציג את התמרת פורייה (הגלובלית) של האות.

באיור 6.15 מוצגת תוצאת שערך פונקצית העיוות של האות מוצגת ומושוית לפונקצית העיוות המקורית (פונקצית האפנון) שיצרה את האות.



איור 6.14 - התמרת פורייה של האות בתחילת התהליך (רציף) ובסיומו (מקווקו).

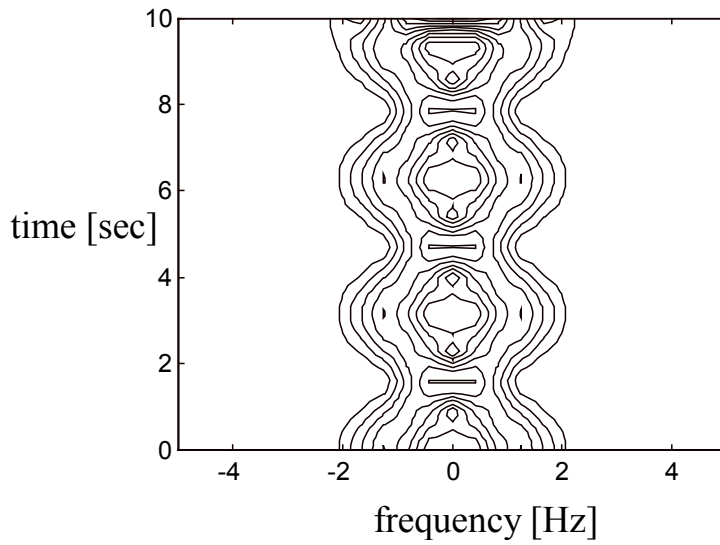
Figure 6.14 - Initial (solid) and final (dashed) Fourier transform.



איור 6.15 - פונקצית עיוות ציר הזמן - ערך תיאורטי (רציף) ושערוד (מקווקו).

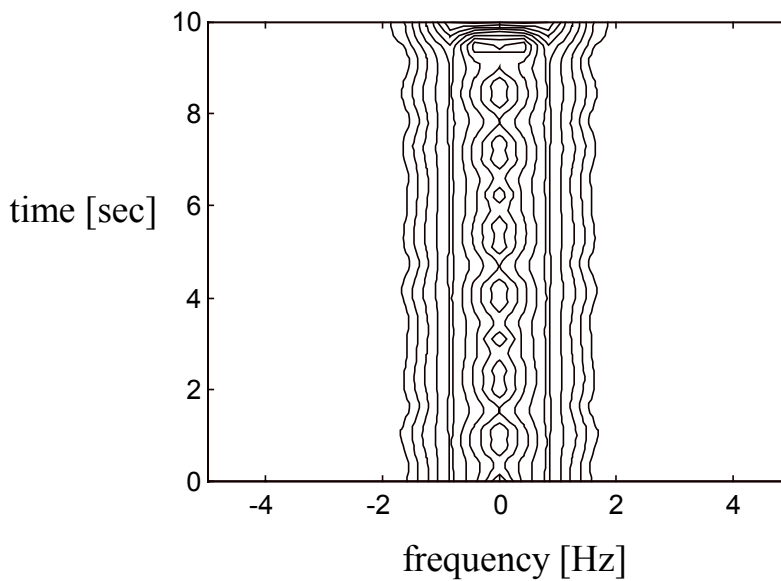
Figure 6.15 - Time distortion function - theoretical (solid) and estimated (dashed).

איורים 6.16 ו-6.17 מציגים בהתאמה את פילוג הזמן תדר של האות הנתון ושל האות מוגבל הסרט המתקבל בסיום התהליך.



איור 6.16 - פילוג זמן-תדר של האות המקורי (STFT).

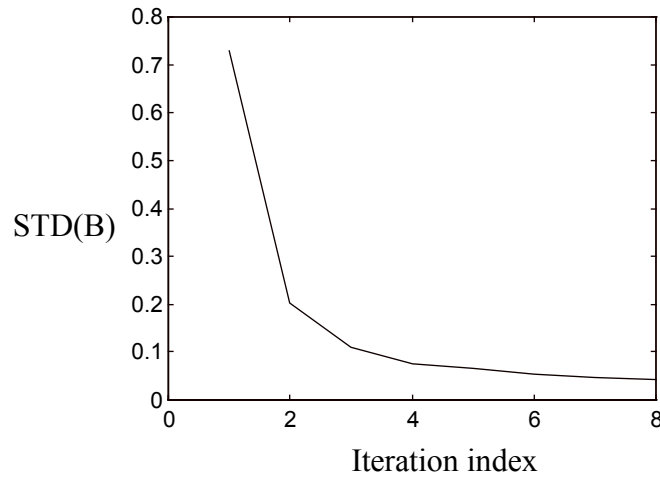
Figure 6.16 - Time-frequency distribution of the original signal (STFT).



איור 6.17 - פילוג זמן-תדר של האות המתקבל בסיום התהליך (STFT).

Figure 6.17 - Time-frequency distribution of the final signal (STFT).

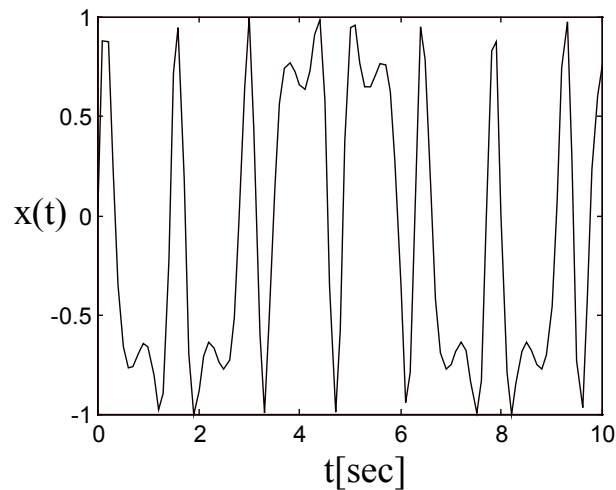
איור 6.18 מציג את קצב התכנסות התהליך ע"י חישוב סטיית התקן של רוחב הסרט המקומי בכל אחד משלבי התהליך האיטרטיבי.



איור 6.18 - סטיית התקן של רוחב הסרט המקומי מדי איטרציה.
Figure 4.7 - STD of instantaneous bandwidth at every iteration.

בדוגמה בהמשך לדוגמה האחרונה נבדוק את השפעת הכפלת תדר אפנון ה-FM באופן הבא, כמוראה באיור 6.19 :

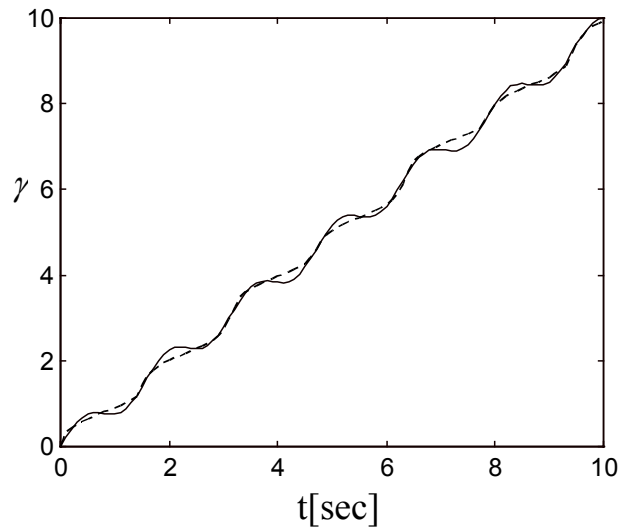
$$x(t) = \sin(5t + \sin(4t)) \quad t \in [0,10] \quad (6.3)$$



איור 6.19 - אות FM מהצורה: $x(t) = \sin(5t + \sin(4t))$ $t \in [0,10]$.

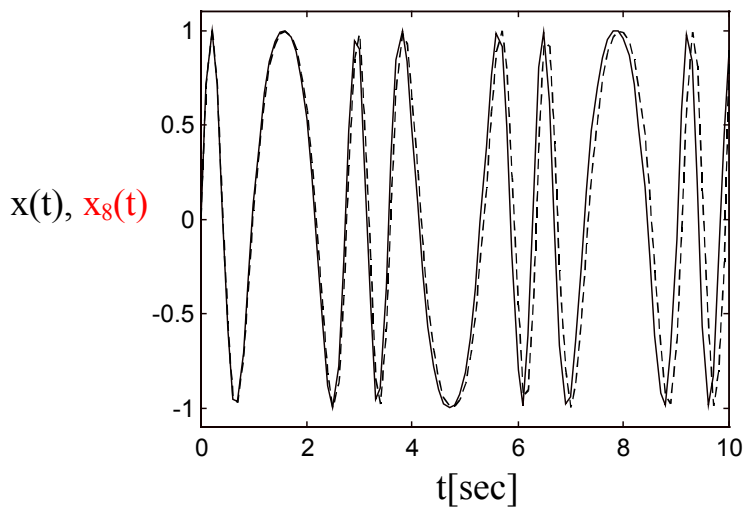
Figure 6.19 - An FM signal of the form: $x(t) = \sin(5t + \sin(2t))$ $t \in [0,10]$.

נבדוק את השפעת הכפלת תדר אפנון על היכולת לשערך את פונקצית העיוות ולשחזר בחזרה את האות בציר הזמן, כמוראה באיורים 6.20 ו-6.21.



איור 6.20 - פונקצית עיוות ציר הזמן - ערך תיאורטי (רציף) ושערך (מקווקו).

Figure 6.20 - Time distortion function - theoretical (solid) and estimated (dashed).

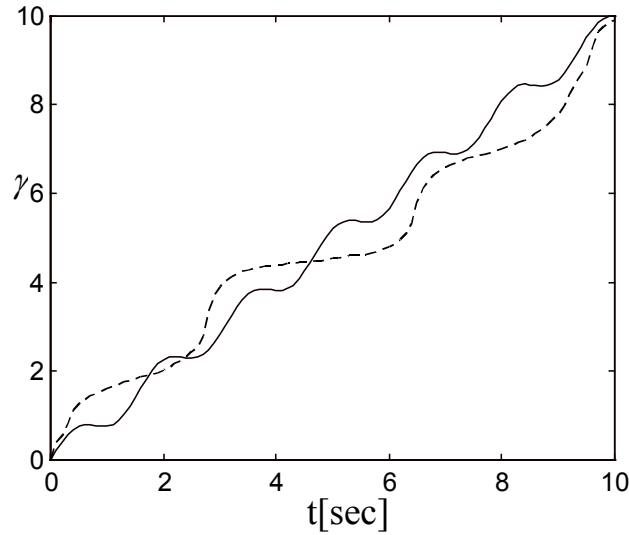


איור 6.21 - האות המקורי (רציף) והאות המשוחזר (מקווקו).

Figure 6.11 - Original (solid) and reconstructed (dashed) signal.

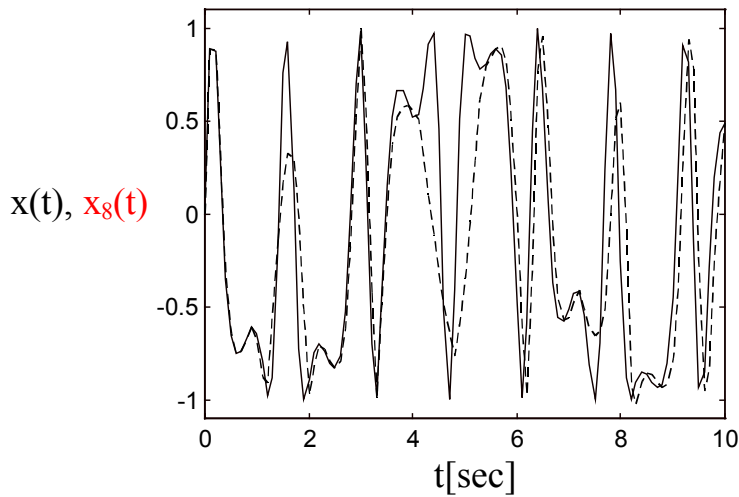
מעניין לראות כיצד הגדלה נוספת של תדר האפנון (משוואה 6.3 להלן) משפיעה לרעה על הצלחת התהליך כמוראה באיורים 6.22 ו-6.23.

$$x(t) = \sin(5t + \sin(4.03t)) \quad t \in [0,10] \quad (6.3)$$



איור 6.22 - פונקציית עיוות ציר הזמן - ערך תיאורטי (רציף) ושערוך (מקווקו).

Figure 6.22 - Time distortion function - theoretical (solid) and estimated (dashed).



איור 6.23 - האות המקורי (רציף) והאות המשוחזר (מקווקו).

Figure 6.23 - Original (solid) and reconstructed (dashed) signal.

הגדלת תדר האפנון בצורה מינורית מנעה למעשה את הצלחת התהליך.

פרק 7

יישומים לשיפור תמונות SAR ולהדמיית מטרות נעות

7.1 תאור כללי

במערכות SAR (Synthetic Aperture Radar) נעשה שימוש בתנועת סנסור מכ"ם להדמיית קרקע ברזולוציה גבוהה. רזולוציה גבוהה בכיוון הטווח (across track) מושגת באמצעות שידור סיגנל רחב סרט ודחיסתו בציר הזמן, ואילו רזולוציה גבוהה בציר האזימוט (along track) מושגת באמצעות עיבוד קוהרנטי של המידע הנקלט לאורך קטע טיסה מסוים (synthetic aperture).

אלגוריתם ה-SAR יוצר למעשה מסנן מתואם (matched filter) דו-ממדי המאפשר לדחוס בטווח ובאזימוט החזר הנקלט ממחזיר נקודתי ניח. כל סטייה מתרחיש אידיאלי, שבו מיקום המטוס ידוע בדיוק אבסולוטי, וכל המחזירים על הקרקע סטטיים, פוגעת באיכות התמונה.

בפועל תנועת המטוס אינה בקו ישר, ומדידי הניווט (IMU - Inertial Measuring Unit) אינם מצליחים לפצות כהלכה על השגיאות במיקום המטוס. שגיאות שיוניות אלה ניתנות לתיקון מתוך המידע עצמו, לרוב על סמך התבוננות בהתנהגות הפאזה (Phase History) של מחזיר חזק או בולט במיוחד, לגביו מניחים שמיקומו קבוע, וביחס להשתנות פאזה ההחזרים ממנו מפצים על שינויי הפאזה של התמונה כולה. עיבוד זה מכונה Autofocus, והוא ניתן למימוש באמצעות האלגוריתם האיטרטיבי.

ייחודיות מערכת ה-SAR לעומת מכ"מים אחרים המשמשים לגילוי ולעקיבה טמונה בכך שהקרקע עצמה (clutter) והעצמים הנייחים שעליה הם האובייקט הממופה. מטרות נעות הן קשות להדמיה וכן מפריעות ביצירת תמונת הקרקע והאובייקטים הנייחים מהסיבות הבאות:

- תנועת מטרות במקביל למפתח הסינתטי (along track) גורמת למריחתן באזימוט ובטווח עקב שגיאות הפאזה המתקבלות והמעבר בין תאי רזולוציה.
- תנועה בניצב למפתח הסינתטי עלולה לגרום למעבר המטרה בין שערי טווח (range migration) ובכך לגרום הן לפגיעה ביכולת הגילוי עקב הירידה ב-SCR (יחס מטרה ל-

clutter), והן לקלקול הרזולוציה עקב הקטנת זמן האינטגרציה. גם בהעדר מעבר בין שערי טווח (או אף לאחר תיקונו) קיימות שגיאות פאזה הנובעות מתנועת המטרה וגורמות להעתקה בצידוד של מיקום המטרה (azimuth displacement).

7.2 ניסוח בעיית SAR

בפסקה זו תוצג הגיאומטריה של בעיית SAR סטנדרטית במוד Spot Light SAR שבו מופנה אנטנת המכ"ם לעבר תא שטח ספציפי. בפסקה זו יוצג העיבוד המבוצע לצורך דחיסה בטווח ובאזימוט [18] תוך שימוש בטרמינולוגיה שהוצגה ב-[19].

נתבונן בסיגנל המשודר:

$$S_t(t) = e^{-j\left(\omega t + \pi \frac{B}{t_p} t^2\right)} \quad (7.1)$$

כאשר B הוא רוחב הסרט של ה-LFM (Linear Frequency Modulation) ו- t_p רוחב הפולס.

סיגנל זה מוחזר (back scattered) מנקודות (m, n) בעלות רפלקטיביות $A_{m,n}$. הסיגנל המוחזר הכולל נוצר מסכימה על כל האלמנטים המחזירים:

$$S_r(t) = \sum_{m,n} A_{m,n} e^{-j\left[\omega\left(t - \frac{2\bar{R}_{m,n}}{c}\right) + \pi \frac{B}{t_p} \left(t - \frac{2\bar{R}_{m,n}}{c}\right)^2\right]} \quad (7.2)$$

כאשר $\frac{2\bar{R}_{m,n}}{c}$ היא ההשהיה הזמנית בין שידור וקליטה המתאימה לטווח $\bar{R}_{m,n}$.

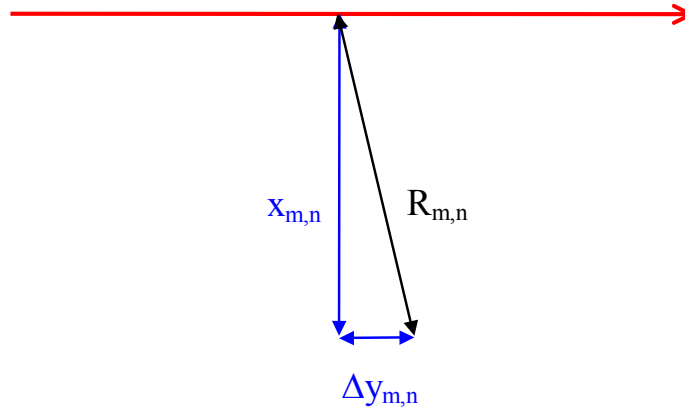
טווח המטוס ממרכז השטח הממופה (spot) בציר האזימוט בתא טווח m הוא:

$$R_{m,n}(t) = \sqrt{x_{m,n}^2 + (vt)^2 + z^2} \quad (7.3)$$

הקונפיגורציה הגיאומטרית מוצגת באיור 7.1.



V



איור 7.1 - גיאומטריה אופיינית במיפוי SAR.

Figure 7.1 - Typical SAR imaging geometry.

טווח המטוס ממרכז ה-spot בציר האזימוט בתא טווח m הוא :

$$R_{m,n}(t) = \sqrt{x_{m,n}^2 + (vt)^2 + z^2} \quad (7.3)$$

ולתאים שונים בציר האזימוט מחשבים את הרחבת הטווח :

$$\bar{R}_{m,n}(t) = \sqrt{x_{m,n}^2 + (vt - \Delta y_{m,n})^2 + z^2} = R_{m,n}(t) - \frac{vt\Delta y_{m,n}}{R_{m,n}} + \frac{\Delta y_{m,n}^2}{2R_{m,n}} \quad (7.4)$$

7.3 עיבוד בשיטת dechirp

בעיבוד המידע במוד Spot Light SAR מקובל להשתמש בשיטת העיבוד המכונה dechirp. בשיטה זו מוכפל האות הנקלט בצמוד הקומפלקסי של הסיגנל המשודר, מושהה בזמן (בהשהיה τ) לפי טווח העניין. פעולת ה-dechirp ניתנת לניסוח מתמטי באופן הבא [19]:

$$S_t(t) \cdot S_r^*(t + \tau) = \sum_{m,n} A_{m,n} e^{j(f_{m,n} + F_{m,n})} \quad (7.5)$$

$f_{m,n}$ הוא רכיב הנוצר ע"י אפקט דופלר, ומשמש לקביעת האיזמוט:

$$f_{m,n} = \frac{2kvt\Delta y_{m,n}}{R_{m,n}} \quad (7.6)$$

כאשר $k = \frac{\omega}{c}$ הוא וקטור הגל.

$F_{m,n}$ מכיל רכיב ליניארי בזמן (חלק מאות ה-chirp) המשמש להפרדה בטווח, וגם רכיב פאזה קבועה התלוי ריבועית בהשהיה ממרכז ה-spot (מכונה residual videophase, וניתן להזנחה עבור גודל spot קטן מספיק). $F_{m,n}$ מתואר מתמטית ע"י:

$$F_{m,n} = \pi \frac{B}{t_p} \left[2t \left(\tau - \frac{2R_{m,n}}{c} \right) + \left(\tau - \frac{2R_{m,n}}{c} \right)^2 \right] \quad (7.7)$$

ממשוואה (7.7) רואים כי הרכיב הראשון בסוגריים הוא סינוס בתדר המתאים להפרש בין ההשהיה הנובעת מטווח המחזיר $R_{m,n}$, לזו המתאימה לטווח מרכז ה-spot (τ). גודל ה-spot בשיטת עיבוד זו מוגבל אינהרנטית עקב הצורך בקיום בו זמני של האות הנקלט ואות הייחוס על פני פרק זמן ארוך מספיק להשגת הרזולוציה הנדרשת גם בשולי ה-spot. קביעת הטווח מבוצעת ע"י ביצוע התמרת פורייה על הביטוי (7.5) (מכפלת הסינגל הנקלט ואות הייחוס המושהה).

7.4 הדגמת Autofocus בשיטה האיטרטיבית

ננסה את השתנות טווח המטוס הנע במהירות קבועה ממחזיר סטטי:

$$R(t) = \sqrt{R^2 + v^2 t^2} = R \sqrt{1 + \frac{v^2 t^2}{R^2}} \cong R + \frac{v^2 t^2}{2R} \quad (7.8)$$

והפאזה הנובעת מתנועת המטרה (Phase History):

$$\phi(t) = \frac{4\pi}{\lambda} R(t) \cong \frac{4\pi}{\lambda} \left(R + \frac{v^2 t^2}{2R} \right) \quad (7.9)$$

ולאחר קיזוז התנועה מנתוני מדידי הניווט (IMU) נדרש לטפל בתאוצת הסחיפה של המדידים
:ε

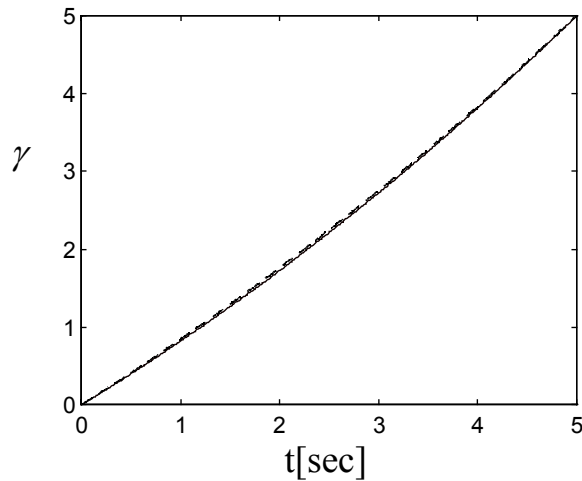
$$s(t) = e^{j(2\pi f_D t + \alpha t^2)} \quad (7.10)$$

לאחר הצבת מספרים מתאימים מתקבל האות עבורו נדרש להריץ את התהליך :

$$s(t) = e^{j(50t + 3t^2)} \quad (7.11)$$

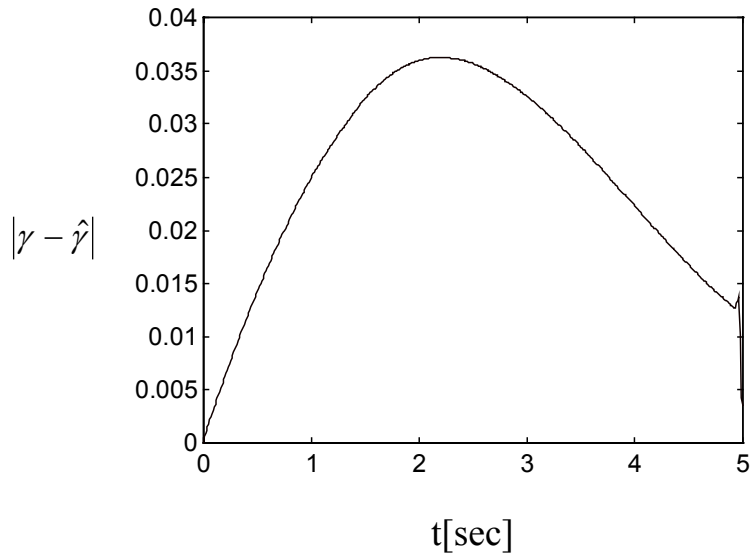
$$\gamma = 50t + 3t^2 \quad (7.12)$$

פונקצית העיוות המתוארת במשוואה (7.12) וזו ששוחזרה באמצעות התהליך האיטרטיבי
תוך ביצוע 8 איטרציות מובאת באיור לשם פשטות הרצנו $s(t) = \sin(50t + 3t^2)$.



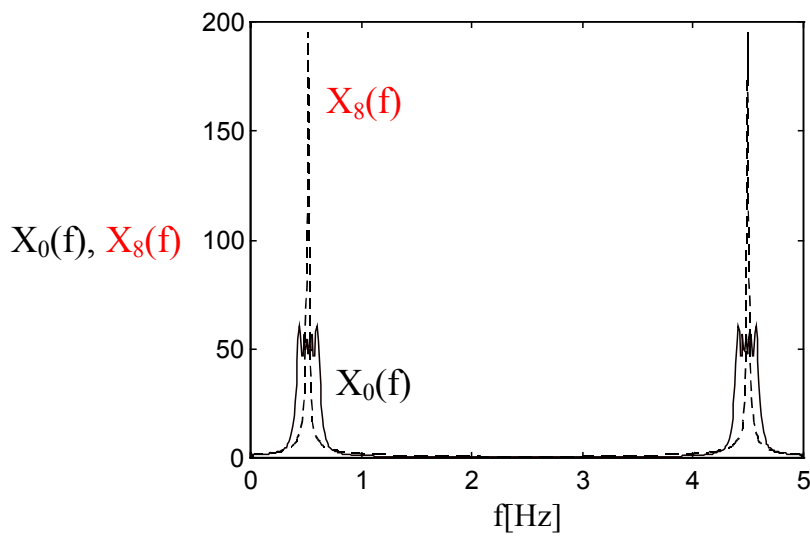
איור 7.2 - פונקצית עיוות ציר הזמן - ערך תיאורטי (רציף) ושערוך (מקווקו).

Figure 7.2 - Time distortion function - theoretical (solid) and estimated (dashed).



איור 7.3 - שגיאה בשחזור פונקצית העיוות.

Figure 7.3 - γ estimation error.



איור 7.4 - רוחב סרט גלובלי לפני ביצוע התהליך (רציף) ואחריו (מקווקו), מבטא את ה-impulse-response המראה את הרזולוציה המושגת.

Figure 7.4 - Initial (solid) and final (dashed) Fourier transform express the impulse response which shows the resolution achieved.

7.5 גילוי מטרות נעות

נבחן כעת את ההשפעה של החלפת המחזיר הסטטי m, n במחזיר שמהירות $v_{m,n}$, ומיקומו הזמני נתון, אם כן, ע"י הביטוי:

$$\Delta y_{m,n}(t) = \Delta y_{m,n} + v_{m,n} t \quad (7.13)$$

ערכו המקורב של רכיב הדופלר המוכלל, המקביל למשוואה (6.6), יהיה:

$$G(\tau) = S_t(t) \cdot S_r^*(t + \tau) \approx \sum_{m,n} A_{m,n} e^{j \left(\frac{2kv_0 t \Delta y_{m,n}}{R_{m,n}} + \frac{2kv_0 v_{m,n} t^2}{R_{m,n}} \right)} \quad (7.14)$$

על מנת לנתח אות זה מומלץ להשתמש בייצוג זמן-תדר, כמודגם ב-[20], [21] ו-[22]. ייצוג כזה מתאים, בשונה מהתמרת פורייה, גם לייצוג אותות לא סטציונריים.

ביצוע התהליך האיטרטיבי על אות זה מאפשר למצוא את פונקצית העיוות הנדרשת על מנת לפצות על שינויי הפאזה של מטרה נעה, ולמעשה מאפשר ביצוע מיפוי SAR של אותה מטרה נעה.

פרק 8

סיכום

בעבודה זו הוצע והודגם פתרון לבעיית הדגימה והשחזור של אותות לא סטציונריים, שדגימתם בקצב קבוע אינה יעילה ובמקרים מסוימים אינה מייצגת. הפתרון המוצע מבוסס על שערך פונקצית עיוות ציר זמן תחתיה הופך האות למוגבל סרט וניתן לטיפול באמצעות הכלים הסטנדרטיים של דגימה אחידה ושחזור. בסיום התהליך ניתן לשחזר את האות המקורי ע"י שימוש בפונקצית עיוות ציר זמן הופכית.

קביעת רגעי הדגימה המדויקים הרצויים נעשית בגישה איטרטיבית. בגישה זו מעוות ציר הזמן באופן איטרטיבי עד להיות האות בעל רוחב סרט אחיד בקירוב על פני ציר הזמן המעוות. הערכת רוחב הסרט הרגעי המבוצעת בכל איטרציה מבוססת על פילוגי זמן-תדר קיימים. התהליך האיטרטיבי מתגבר על אי-הדיוק בשערך רוחב הסרט הרגעי המבוצע מדי איטרציה.

פונקצית עיוות ציר הזמן המתקבלת בסיום התהליך תלויה באות עצמו ולא בשיטה ששימשה להערכת רוחב הסרט ולפיכך מאפשרת מתן הגדרה רובוסטית לרוחב הסרט הרגעי באמצעות גזירת פונקצית העיוות. עבור אותות מאופנני תדר התקבלה בסיום התהליך פונקצית עיוות ציר זמן שהייתה כמעט זהה לפונקצית האפנון של האות.

להצלחת התהליך ביישומים מעשיים נדרש להבטיח כי אות נתון דגום בקצב מספק על מנת לשחזר את תכולתו הספקטרלית. מרבית התמונות שבחנו היו דגומות בתדר מרחבי נמוך מהדרוש על פי תנאי נייקוויסט. במקרה כזה עשויה אינטרפולציה לשפר את סיכויי ההתכנסות של התהליך. בנוסף לכך ראינו ששערך פונקצית העיוות במספר גדול יותר של נקודות על פני אינטרוול הזמן הרלוונטי מאפשר התכנסות טובה יותר לפונקצית העיוות המבוקשת.

גם לקביעה מושכלת של גודל החלון משמעות מעשית לגבי הצלחת התהליך. מחד, הערכת רוחב הסרט המקומי תוך שימוש בחלון זמן קצר מדי אינה מספקת את הדיוק הנדרש בשערך רוחב הסרט. מאידך, שימוש בחלון זמן ארוך מדי אינו מאפשר לעקוב אחרי השינויים המתרחשים במשך זמן קיום החלון. בכך נמנעת למעשה האפשרות להתכנס לערכה המבוקש של פונקצית העיוות.

ביצועי התהליך האיטרטיבי הודגמו עבור מגוון של אותות מאופנני תדר (FM) שבהם פונקצית העיוות הנדרשת היא למעשה פונקצית האפנון שיצרה את האות. עבור אותות כאלה קל לבחון

את ביצועי האלגוריתם האיטרטיבי ע"י השוואה בין פונקציית העיוות המשוערכת בסיום התהליך לבין פונקציית האפנון המקורית.

כמו כן הודגמו ביצועי האלגוריתם עבור אות Audio ועבור שורה מתוך תמונה. ביישומים מעשיים כאלה פונקציית העיוות אינה נתונה, ובחינת הצלחת האלגוריתם צריכה להיעשות מתוך בחינת מוגבלות הסרט של האות המתקבל בסיום התהליך או מבחינת השתנות רוחב הסרט המקומי שלו על פני ציר הזמן המעוות.

חשיבות האפשרות להעריך במדויק את רוחב הסרט הרגעי הודגמה עבור הדמיית SAR וגילוי מטרות נעות. קבלת פונקציית העיוות מאפשרת הפקה של היסטוריית הפאזה של מחזיר נקודתי חזק ולכן מאפשרת התגברות על שגיאות בפיצוי תנועת המכ"ם, ובכך לאפשר התמקדות במחזירים וביצוע הדמיה מיטבית שלהם.

שימוש יעיל בשיטה המוצגת בעבודה זו לדחיסה [23] ולייצוג יעיל של אותות מותנה ביכולת לייצג באופן חסכוני את פונקציית העיוות המלווה את האות הדגום באופן לא אחיד ומאפשרת את שחזורו. ככיוון מעניין להמשך העבודה מומלץ לבחון שיטות לייצוג חסכוני של פונקציית עיוות ציר הזמן. כיוון כזה יהיה הכרחי על מנת להשתמש בתהליך המוצג בעבודה זו לשימושים בהם יידרש להציג אותות בעלי אפיונים משתנים בצורה דחוסה ככל האפשר. זאת מאחר שכאמור, הדגימה הלא-אחידה שהוצגה נראית יעילה מבחינת מספר הדגימות הנדרש, אולם בעייתית עקב ההכרח לשמור את פונקציית העיוות, המאפשרת לשחזר מתוך הפונקציה המעוותת את ערכה של הפונקציה המקורית בכל רגע ורגע.

גם הרחבת העבודה לטיפול באותות דו-ממדיים עשויה לפתוח פתח לטיפול בתמונות בצורה טבעית יותר (לעומת הטיפול בכל שורה בנפרד כמודגם בעבודה זו). עם זאת חשוב להדגיש את הקשיים המתמטיים והסיבוכיות החישובית שיהיו כרוכים בהרחבת הטיפול באמצעות דגימה לא אחידה גם עבור אותות דו-מימדיים.

ביבליוגרפיה

- [1] M. Porat and Y. Y. Zeevi, "The Generalized Gabor Scheme of Image Representation in Biological and Machine Vision", *IEEE Trans. Patt. Anal. and Machine Intell.* vol. PAMI-10, no. 4, pp. 452-468, 1988.
- [2] N. Peterfreund and Y. Y. Zeevi, "Nonuniform Image Representation in Area-of-Interest Systems", *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 4, no. 9, pp. 1202-1212, 1995.
- [3] Y. Y. Zeevi and E. Shlomot, "Non-uniform Sampling and Antialiasing in Image Representation", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, pp. 1223-1236, 1993.
- [4] J. J. Clark, M. R. Palmer and P. D. Lawrence, "A Transformation Method for the Reconstruction of Functions from Non-uniformly Spaced Samples", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 4., pp 1151-1165, 1985.
- [5] A. Papoulis, "Error analysis in sampling theory", *Proc. IEEE*, vol. 54, pp. 947-955, 1966.
- [6] A. J. Jerri, "The Shannon sampling theorem-Its various extensions and applications: A tutorial review," *Proc. IEEE*, vol. 65, pp. 1565-1596, 1977.
- [7] K. Horiuchi "Sampling Principle for Continuous Signals with Time-Varying Bands", *Information and Control* vol. 13, pp. 53-61, 1968.
- [8] L. Cohen, "Time-Frequency Distributions - A Review", *Proc. IEEE*, vol. 77, pp. 941-981, 1989.

- [9] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbraeuker, "The Wigner Distribution - A Tool for Time-Frequency Signal Analysis, Part I: Continuous-Time Signals", *Philips J. Res.*, vol. 35, pp. 217-250, 1980.
- [10] B. Boashash and P. J. Black, "An Efficient Real-Time Implementation of the Wigner-Ville Distribution", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol ASSP-35, no. 11, 1987.
- [11] W. Martin and P. Flandrin, "Wigner-Ville Spectral Analysis of Nonstationary Processes", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 6., pp 1461-1470, 1985.
- [12] L. Stankovic, "A Method for Time-Frequency Analysis", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 1, pp. 225-229, 1994.
- [13] A. Francos and M. Porat, "Analysis and Synthesis of Multicomponent Signals Positive Time-Frequency Distributions", Technion CC Publication No. 169, scheduled to appear in *IEEE Trans. on Signal Processing*, February 1999.
- [14] M. A. Poletti "The development of instantaneous bandwidth via local signal expansion," *Signal Processing*, vol. 31, no. 3, 1993.
- [15] L. Cohen and C. Lee, "Instantaneous Frequency, its Standard Deviation and Multicomponent Signals", *SPIE Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing III*, vol. 975, pp. 186-208, 1988.
- [16] A. W. Rihaczek, "Signal Energy Distribution in Time and Frequency", *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. IT-14, no.3, pp. 369-374, 1968.
- [17] I. Kay and R. A. Silverman, "On the Uncertainty Relation for Real Signals", *Information and Control*, vol. 1, pp. 64-75, 1957.

- [18] W. G. Carrara, R. S. Goodman and R. M. Majewski, "Spotlight Synthetic Aperture Radar: Signal Processing Algorithms", Artech House, 1995.
- [19] M. Sanghadasa, P. S. Erbach and C. C. Sung, "Wavelet transform applied to synthetic aperture radar - optical implementation and adaptive techniques," *Optical Engineering*, vol. 33, no. 7, 2282-2288, 1994.
- [20] W. Rieck, "SAR Imaging of Moving Targets: Application of Time-Frequency Distribution for Single- and Multichannel Data", EUROSAR'96, Koenigswinter, Germany, 1996.
- [21] S. Barbarosa, "Detection and Imaging of Moving Targets with Synthetic Aperture Radar, Part 1: Optimal Detection and Parameter Estimation Theory", *IEE Proceedings-F*, vol. 139, no. 1., pp 79-88, 1992.
- [22] S. Barbarosa and A. Farina, "Detection and Imaging of Moving Targets with Synthetic Aperture Radar, Part 2: Joint Time-Frequency Analysis by Wigner-Ville Distribution", *IEE Proceedings-F*, vol. 139, no. 1., pp 89-97, 1992.
- [23] Y. Eldar, M. Lindenbaum, M. Porat and Y.Y. Zeevi, "The Farthest Point Strategy for Progressive Image Sampling", *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 6, no. 9, pp. 1305-1315, 1997.