Electronics
Computers
Communications

Technion

# הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

## הפקולטה להנדסת חשמל

המעבדה לראייה ומדעי התמונה

## מעבדה 2 , 3

*ניסוי בהדמיה רפואית*

*http://visl.technion.ac.il/exp5.htm*

## סמסטר חורף תשע"א

עדכון: אוקטובר 2010

# מ ב ו א

חוברת זו מתארת ניסוי בסיסי בתחום הדמיות רפואיות, תחת החסות של המעבדה לראייה ומדעי התמונה (VISL). (עדכון אחרון על ידי יבגני גרשיקוב, אוקטובר 2010)

### דרישות קדם

הקורס "מבוא לעיבוד ספרתי של אותות" או קורס מקביל וכן הכרה כללית של תוכנת MATLAB.

### מטרות הניסוי

מטרת הניסוי היא להציג את התחום של הדמיה רפואית: השיטה שבה משתמשים, הבעיה של שיחזור אובייקט מההיטלים שלו ושיטות בסיסיות לפתרון הבעייה. לאחר ביצוע הניסוי צפויה להיות לכם הבנה בסיסית של בעיית השחזור הקיימת בטומוגרפיה רפואית ושל שיטות אופטימיזציה נומריות שבהם ניתן להשתמש לצורך פתרונה. הניסוי מחולק לשני חלקים.

החלק הראשון דן במבוא למושגים של טומוגרפיה ממוחשבת (Computerized Tomography או בקיצור CT), בפרט היטל (projection) והתמרת רדון (Radon transform) וברעיונות בסיסיים של תורת האופטימיזציה של פונקציות קמורות, תורה שדנה באלגוריתמים למציאת מינימום של פונקציה קמורה מרובת משתנים. במסגרת החלק הראשון של הניסוי נממש אלגוריתם איטרטיבי פשוט לצורך שיחזור אובייקט דו מימדי מההיטלים שלו במרחב המקום.

החלק השני של הניסוי מוקדש לקשר שבין התמרת פורייה של האובייקט המוקרן והתמרת פורייה של ההיטלים או לחילופין של התמרת רדון. על בסיס קשר זה נבצע שיחזור של האובייקט במרחב התדר תוך שימוש בהתמרת פורייה לא אחידה (Non-Uniform Fourier Transform או בקיצור NUFT). גם כאן נממש אלגוריתם שיחזור איטרטיבי על בסיס שיטות בסיסיות של אופטימיזציה נומרית.

### חומר רקע

כל המידע שדרוש להכנת הניסוי כולל חוברת זו נמצא באתר הניסוי: http://visl.technion.ac.il/exp5.htm
אתר זה כולל בנוסף להוראות ועדכונים גם קישורים עם הסברים על כל הנושאים שבניסוי זה.
חומר רקע לנושא של טומוגרפיה ממוחשבת ניתן למצוא בספר שנמצא ברשת:
Kak and Slaney, *Principles of computerized tomography*, http://www.slaney.org/pct/pct-toc.html.

בנוסף ניתן להשתמש במסכי help על פונקציות MATLAB בכתובת: http://www.mathworks.com/
הדרכה כללית ב- MATLAB : http://www.ee.technion.ac.il/courses/matlab

### סוגי המטלות בניסוי זה

הניסוי יבוצע בשפת התכנות מטלב (Matlab). ישנם 3 סוגי מטלות שמופיעים במסמך זה:

- שאלות תיאורטיות שמצריכות תשובה כתובה.
- שאלות שדורשות כתיבת קוד ב-Matlab.
- שאלות שדורשות הצגת גרף או תמונה (figure).

### מבנה המעבדה

המעבדה כוללת 2 פגישות (חלק א' וחלק ב'), כל חלק נמשך 4 שעות.

חלק א': בחינה בעל פה על דו"ח מכין חלק א' (~30 דקות), ביצוע הניסוי (חלק א') (~3.5 שעות).

חלק ב': בחינה בעל פה על דו"ח מכין חלק ב' (~30 דקות), ביצוע הניסוי (חלק ב') (~3.5 שעות).

הציון לניסוי זה ייקבע על פי המפתח הבא:

20% - הכנה (הדו"ח המכין והמבחן בעל פה עליו)
45% - ביצוע (שלמות ואיכות ביצוע התרגילים בניסוי עצמו)
15% - הערכה (התרשמות המדריך מהבנת החומר)
20% - דו"ח סיכום (דו"ח אלקטרוני הכולל תשובות לשאלות הנמצאות בגוף הניסוי, הסברים ומסקנות).

## הנחיות כלליות

יש להגיע למעבדה מוכנים על פי משימות ההכנה של כל תרגיל – על פי חוברת זו. את הדו"ח המכין יש להגיש למדריך בצורה אלקטרונית בזמן הפגישה או לפניה והוא גם ישמש כעזר לביצוע הניסוי. בתחילת הניסוי המדריך יערוך בחינה בעל פה על תוכן הדו"ח המכין.

כללית יש לבצע את הסעיפים של הניסוי על פי חוברת זו – ייתכנו שינויים על פי הנחיות המדריך!

שימו לב: חלק משאלות הדו"ח המסכם מתייחסות לתוצאות שמתקבלות בזמן הניסוי. לכן, ודאו שעניתם עליהן בטרם תעברו לניסוי הבא.

אחרי ביצוע הניסוי יש להגיש דו"ח מסכם – עד שבועיים לאחר הפגישה השנייה - לידי המדריך בצורה אלקטרונית.

# חלק א'

## 1. שאלות הכנה – טומוגרפיה ממוחשבת והתמרת רדון

1.1. קראו את פרק 1 (עמודים 1-4) בספר של Kak & Slaney.

א. מה ההבדל העיקרי בין טומוגרפיה ממוחשבת וצילום רנטגן רגיל?

ב. האם ניתן להשתמש בטומוגרפיה ממוחשבת רק בצילום רנטגן?

1.2. קראו את פרק 3, עמודים 1-8 בספר של Kak & Slaney.

א. מה זה היטל (projection) – תנו הגדרה מתמטית של היטל בזווית $\theta$ של אובייקט דו מימדי $f(x,y)$.

ב. מה היא התמרת רדון ומה הקשר שלה להיטל שהגדרתם בסעיף הקודם?

ג. חשבו את התמרת רדון של האובייקט $f(x,y)=\delta(x-x_0, y-y_0)$. על בסיס התוצאה שקיבלת, הסבירו מדוע, לדעתכם, אוסף ההיטלים של אובייקט נקרא לעיתים סינוגרמה (sinogram)?

ד. הסבירו מדוע מספיק לקחת את ההיטלים של אובייקט עבור זוויות בתחום של $0$ עד $\pi$ ולא $0$ עד $2\pi$?

1.3. ביישומים מעשיים של התמרת רדון, אנו מעוניינים בגרסה דיסקרטית שלה. האובייקט $f(x,y)$ ייוצג בתור תמונה $\boldsymbol{F}[m,n]$, כשהאינדקסים $m,n=1,2,\ldots,N$ הם הקורדינאטות המרחביות של פיקסל בתמונה. לשם פשטות, נניח שהתמונה ריבועית. נרצה לקחת היטלים של האובייקט ב-$K$ זוויות דיסקרטיות $\theta_k$ בהפרשים שווים זו מזו באינטרוול $[0, \pi)$. היטל (מקבילי) בזווית $\theta_k$ בצורת וקטור יהווה עמודה $k$ במטריצת התוצאה $\boldsymbol{P}[l,k]$ $(l=1,\ldots,L\ ,\ k=1,\ldots,K)$, כאשר האינדקס $l=1,\ldots,L$ רץ על הערכים של הפרמטר $t$ של ההיטלים (ראו למשל משוואה (1) בפרק 3 בספר של Kak & Slaney). התמרת רדון הדיסקרטית היא לכן אופרטור ליניארי $R:\boldsymbol{F}[m,n]\rightarrow\boldsymbol{P}[l,k]$.

א. הניחו אובייקט בצורת תמונה ריבועית $\boldsymbol{F}[m,n]$, כשהאינדקסים $m,n=1,2,\ldots,N$. כתבו ביטוי לקירוב הדיסקרטי של התמרת רדון תוך שימוש בקירוב של אינטרלים ע"י סכומי רימן עם צעדים $\Delta x$ ו-$\Delta y$ .

ב. ציירו דיאגראמה איכותית של ביצוע חישוב היטל דיסקרטי. הניחו כי כל פיקסל באובייקט הוא ריבוע בגודל $1x1$ (ולא נקודה). מהו המספר המכסימלי של פיקסלים של $F[m,n]$ שנסכמים לאורך קו של היטל מסויים?

ג. הניחו כי הערכים של הפרמטר $t$ נלקחים גם כן בהפרשים שווים זה מזה של 1, כלומר $t_{l+1}-t_l=1$. בכל זווית $\theta_k$ ניתן להעביר קו דרך מרכז התמונה, שעבורו $t=0$. בהנחה שנרצה לקחת את ההיטלים עבור כל הערכים "המעניינים" של $t$ מערך מינימאלי שלילי כלשהו (שאין טעם לרדת מתחתיו כי לא נקבל היטל אינפורמטיבי של האובייקט) עד ערך מכסימלי חיובי כלשהו, מהו מספר הערכים המירבי $L$ של הפרמטר $t$ שנרצה לקחת? בטאו את $L$ ע"י $N$.

רמז: הסתכלו על היטל של התמונה בזווית של $45°$, אז צפוי להתקבל הערך המרבי של $L$. מדוע?

1.4. כעת הניחו שהתמונה נסרקת לווקטור עמודה אחד ארוך המכיל את וקטורי העמודה של התמונה משורשרים זה אחר זה לפי הסדר (column stack). נסמן וקטור זה בתור

$$\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{F}[1,1]\ \boldsymbol{F}[2,1]\ldots\boldsymbol{F}[N,1]\ \boldsymbol{F}[1,2]\ \boldsymbol{F}[2,2]\ldots\boldsymbol{F}[N,2]\ldots\boldsymbol{F}[1,N]\ \boldsymbol{F}[2,N]\ldots\boldsymbol{F}[N,N])^T\in\Re^{N^2}$$

התמרת רדון היא מיפוי ליניארי מ- $\Re^{N^2}$ ל- $\Re^{LK}$, שניתן לייצג ע"י מטריצה $\boldsymbol{R}$ בגודל $LKxN^2$, כך שמתקיים $\boldsymbol{p=Rf}$, כאשר $\boldsymbol{p}$ היא תוצאת ההתמרה.

א. כיצד בונים את הווקטור $\boldsymbol{p}$ מהמטריצה הדו ממדית של ההיטלים $\boldsymbol{P}[l,k]$ ($\boldsymbol{P}[l,k]$ כפי שמוגדר בשאלה 1.3)?

ב. מה ניתן לומר על אופי המטריצה $\boldsymbol{R}$ - האם היא מכילה הרבה ערכים שאינם אפס? מדוע?

ג. מה המימדים של המטריצה $\boldsymbol{R}$ עבור תמונה בגודל $128x128$ והיטלים שנלקחים כל $1^\circ$? אלו בעיות צפויות להיות בטיפול בכזאת מטריצה? כיצד אופי המטריצה (סעיף ב) יכול לעזור לעשות עליה פעולות אלגבריות?

ד. הניחו כי יש לכם פונקציה (למשל radon ב-Matlab), שבהינתן תמונה $\boldsymbol{f}$ (בייצוג column stack), יכולה לחשב את התמרת הרדון שלה, כלומר את $\boldsymbol{p=Rf}$. הציעו דרך לחשב באמצעות הפונקציה הנ"ל את המטריצה $\boldsymbol{R}$.

רמז: השתמשו בעובדה שלמרחב $\Re^{N^2}$ קיים בסיס סטנדרטי $\{e_k\}, k=1,...N^2$ ($e_k$ היא עמודה $k$ של מטריצת היחידה $\boldsymbol{I}$ ממימד $N^2xN^2$), כך שכל וקטור במרחב זה ניתן לייצג ע"י צירוף ליניארי של איברי הבסיס. חשבו כיצד ניתן לבטא את עמודה $k$ של $\boldsymbol{R}$.

1.5. ניתן להגדיר את בעיית השחזור בטומוגרפיה כבעיית פתרון מערכת משוואות ליניאריות שנתונה בצורה מטריצית ע"י $\boldsymbol{Rf=p}$, כאשר $\boldsymbol{f}$ הוא אובייקט דו מימדי לא ידוע (בייצוג column stack) ואילו $\boldsymbol{p}$ הם ההיטלים שנמדדים. בעיות מסוג זה נקראות בעיות היפוך (inverse problems). לא תמיד הן מוגדרות היטב.

א. רשמו פתרון אנליטי לבעיה $\boldsymbol{Rf=p}$. שימו לב: $\boldsymbol{R}$ לרוב אינה ריבועית!!! השתמשו בפירוק לערכים סינגולאריים של $\boldsymbol{R}$, כלומר: $\boldsymbol{R=USV^T}$, כאשר עבור מטריצה $\boldsymbol{R}$ בגודל $AxB$, $\boldsymbol{U}$ היא מטריצה אוניטרית בגודל $AxA$ ($\boldsymbol{UU^T=I_{AxA}}$), $\boldsymbol{V}$ היא מטריצה אוניטרית בגודל $BxB$ ($\boldsymbol{VV^T=I_{BxB}}$) ואילו $\boldsymbol{S}$ היא מטריצה בגודל $AxB$ עם ערכים אי שליליים רק באלכסון הראשי (שהם הערכים הסינגולאריים של $\boldsymbol{R}$) ואפסים מחוצה לו.

שימו לב: לכל מטריצה קיים פירוק לערכים סינגולאריים ומתקיים $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}^T$, כלומר ריבועי הערכים הסינגולאריים של $\boldsymbol{R}$ (האיברים באלכסון של $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}$) הם הערכים העצמיים של $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$. כמו כן הדרגה של המטריצה $\boldsymbol{R}$ (מספר השורות והעמודות הבלתי תלויות ליניארית) הוא כמספר הערכים הסינגולאריים הגדולים מ-0 ממש.

ב. מתי עלולה להיות בעיה בפתרון שהצעתם ומה היא?

בחלק הבא ננסה לפתור את הבעייתיות של סעיף ב.

## 2. שאלות הכנה - מבוא לתורת האופטימיזציה

נתחיל במבוא קצר לתורת האופטימיזצייה. התיאוריה שנציג תאפשר לבנות אלגוריתמים איטרטיביים לפתרון בעיות היפוך. המשפט שעליו נתבסס באופטימיזציה ניתן להצגה בצורה הבאה:

תהי $\varphi\ :\ D\ \subseteq\ \Re^n\ \rightarrow \Re$ פונקצייה של $n$ משתנים מעל תחום $D$. אם $\varphi$ פונקצייה קמורה, כלומר מתקיים

$$\varphi\left(\mu \boldsymbol{x}+(1-\mu)\boldsymbol{y}\right)\le \mu\varphi\left(\boldsymbol{x}\right)+(1-\mu)\varphi\left(\boldsymbol{y}\right),\ \ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D,\ \forall\mu\in[0,1]$$

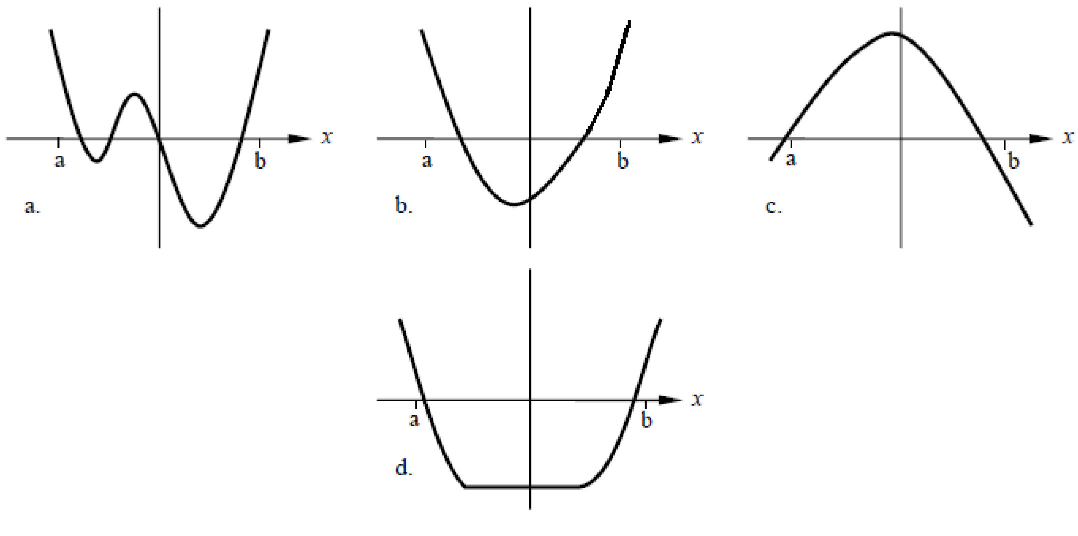
וגם $D$ תחום קמור:

$$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D\Rightarrow \mu\boldsymbol{x}+(1-\mu)\boldsymbol{y}\in D,\ \ \forall\mu\in[0,1],$$

אזי ל-$\varphi$ יש מינימום גלובלי יחיד מעל $D$, שהוא גם מינימום לוקלי מעל $D$.

2.1. אלו מהפונקציות הבאות קמורות מעל הקטע [a,b]? הסבירו כיצד ניתן לראות זאת מהציור.

סמנו את נקודות המינימום הגלובליות והלוקליות (אם יש נקודות מינימום לוקליות) של כל פונקציה בקטע.




משמעות התוצאה היא שעבור פונקציה קמורה מספיק למצוא מינימום לוקלי והרי מצאנו גם את המינימום הגלובלי. נגדיר את הגרדיאנט של הפונקציה $\varphi$ בתור וקטור הנגזרות החלקיות מסדר ראשון:

$$\nabla\varphi(\boldsymbol{x}_0)=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\end{pmatrix}^T\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$$

ואת ההסיאן בתור מטריצת הנגזרות החלקיות מסדר שני:

$$H(\boldsymbol{x}_0)=\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x}_0)=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\cdots & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$$

.2.2

א. בהנחה שלפונקציה $\varphi$ יש נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 2 $(\phi \in C^2)$, איזה סוג מטריצה הוא ההסיאן?

ב. אם $\boldsymbol{x}^* = \underset{x \in D}{\operatorname{argmin}}\ \varphi(\boldsymbol{x})$ היא נקודת המינימום הלוקלי של $\varphi$ מעל התחום $D$, מה צריך לקיים גרדיאנט הפונקציה בנקודה $\boldsymbol{x}^*$?

.2.3

אנו מתעניינים כזכור בפתרון משוואות ליניאריות מהצורה $\boldsymbol{Rx=y}$ עבור מטריצה $\boldsymbol{R}$, שהיא לאו דווקא ריבועית. ניתן לנסח בעיית היפוך זאת בתור בעיית אופטימיזציה בצורה הבאה: בהינתן המדידות $\boldsymbol{y}$, נרצה למצוא את האובייקט $\boldsymbol{x}$, כך שהמרחק של $\boldsymbol{Rx}$ מ-$\boldsymbol{y}$, למשל במובן של נורמה ריבועית הוא הקטן ביותר, כלומר:

$$\boldsymbol{x}^* = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmin}}\ \left\|\boldsymbol{Rx}-\boldsymbol{y}\right\|^2 = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmin}}\ \left(\boldsymbol{Rx}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{Rx}-\boldsymbol{y}\right) \quad (\#)$$

א. כתבו את הפונקציה $\varphi(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{Rx}-\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{Rx}-\boldsymbol{y}\right)$ בצורה מפורשת של פונקציה ריבועית:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c\,.$$

ב. הראו כי הפונקציה $\varphi(\mathbf{x})$ היא קמורה. השתמשו בהגדרה. הניחו כי המטריצה $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$ היא סימטרית ומוגדרת אי שלילית, כלומר $\boldsymbol{v}^T(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R})\boldsymbol{v} \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \Re^n$.

ג. מצאו את הגרדיאנט $\nabla\varphi$ ואת ההסיאן $\nabla^2\varphi$ (ע"י גזירה של הגרדיאנט).

ד. על פי התנאי שצריך לקיים הגרדיאנט של פונקציה בנקודת המינימום (שאלה 2.2, סעיף ב) מצאו פתרון אנליטי של בעיית ההיפוך כבעיית אופטימיזציה (משוואה (#) לעיל). האם קיבלתם פתרון זהה לפתרון בשאלה 1.5, סעיף א?

2.4. את האופטימיזציה של הפונקציה $\varphi(\boldsymbol{x})$ נבצע ע"י שיטות נומריות תוך שימוש בפונקציה fminunc של Matlab לאופטימיזציה ללא אילוצים (unconstained optimization). אחת השיטות הפשוטות ביותר לאופטימיזציה נומרית של פונקציה קמורה היא ה-Steepest Descent. זהו אלגוריתם איטרטיבי שבו בוחרים ניחוש התחלתי למינימום $\boldsymbol{x}_0$ ובאיטרציה ה-$k$ ($k=1,2,3,\dots$) הולכים מהניחוש הנוכחי $\boldsymbol{x}_k$ בכיוון ההפוך לכיוון הגרדיאנט אל הניחוש הבא $\boldsymbol{x}_{k+1}$, כלומר האלגוריתם הוא:

1. בחרו נקודה התחלתית $\boldsymbol{x}_0$.
2. בצעו עדכון של הניחוש לפתרון: $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \mu_k\nabla\phi(\boldsymbol{x}_k)$, כלומר לכו צעד $\mu_k$ בכיוון ההפוך לגרדיאנט $\left(-\nabla\phi(\boldsymbol{x}_k)\right)$.
3. אם האלגוריתם התכנס, למשל $\boldsymbol{x}_{k+1}$ קרוב מספיק ל-$\boldsymbol{x}_k$, עצרו. אחרת – חזרו לסעיף 2.

א. איזה תנאי לדעתכן נדרש על הצעדים $\mu_k$ בשביל להבטיח שתהיה התכנסות (ולא התבדרות) אם הפונקצייה קמורה?

ב. מה יקרה אם הצעדים $\mu_k$ יהיו מאוד קטנים?

בפועל הפונקציה fminunc היא זו שתדאג לבחירת הצעדים.

**להגשה-דוח מכין חלק א'**

- תשובות לכל השאלות שנדרשת בהן תשובה בכתב ( ).
- יש לצרף שרטוט בשאלות שבהן הדבר רלוונטי.

## 3. חלק א' – סימולציות

נניח שהאובייקט הוא תמונה בגודל 32x32, שנסרקת בזוויות [0:2:179] מעלות.

3.1. נשתמש בתוצאה של שאלת הכנה 1.4, סעיף ד כדי לבנות את המטריצה $\boldsymbol{R}$. היות והמטריצה גדולה נשמור אותה תוך ניצול העובדה שרוב ערכיה הם 0 (תכונה שנקראת sparsity).

א. הפעילו את פונקציית Matlab בשם radon על תמונה כלשהי בגודל 32x32 כדי למצוא את מימדי המטריצה $\boldsymbol{R}$. מהם מימדיה?

ב. העריכו את מספר הערכים השונים מ-0 במטריצה $\boldsymbol{R}$. השתמשו בתשובה שלכם לשאלת הכנה 1.3, סעיף ב.

ג. השתמשו בפונקציה spalloc כדי להקצות מטריצה מסוג sparse עם מספר הערכים השונים מ-0 שהערכתם בסעיף הקודם (מומלץ לקחת מספר קצת יותר גדול).

ד. כעת מלאו את המטריצה שיצרתם לפי האלגוריתם שהצעתם בשאלת הכנה 1.4, סעיף ד.

הציגו את תבנית המטריצה תוך שימוש בפונקצייה spy.

ה. כעת יצרו תמונת מוח סינטטית בגודל 32x32 ע"י שימוש בפונקציה phantom בצורה הבאה:

Img = phantom('Modified Shepp-Logan', …)

חשבו את התמרת רדון של התמונה ע"י שימוש בפונקציה radon וע"י סריקת התמונה לווקטור עמודה $\boldsymbol{x}$ וחישוב של $\boldsymbol{Rx}$.

השוו את התוצאות ויזואלית וע"י חישוב שורש של שגיאה ריבועית ממוצעת בין התוצאות (השגיאה הריבועית הממוצעת היא סכום הריבועים של ההפרשים חלקי מספר הפיקסלים).

3.2. ברצוננו כזכור לשחזר את התמונה המקורית מתוך התמרת רדון שלה $\boldsymbol{y}$ ע"י מזעור של הפונקציה $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{Rx}-\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{Rx}-\boldsymbol{y})$.

א. כתבו פונקציה [f,grad,hess] = func(x,arg1,arg2,…), שתחשב בנקודה $\boldsymbol{x}$ את ערך הפונקציה, הגרדיאנט שלה וההסיאן שלה ($\varphi(\boldsymbol{x}),\ \nabla\varphi(\boldsymbol{x}),\ \nabla^2\varphi(\boldsymbol{x})$). רצוי שתשתמשו ב-nargout לבדיקת מספר משתני הפלט של הפונקציה (אם 1 יש להחזיר רק את $\varphi(\boldsymbol{x})$, אם 2 יש להחזיר את $\varphi(\boldsymbol{x}),\ \nabla\varphi(\boldsymbol{x})$ וכו').

ב. טענו את הנתונים $\boldsymbol{y}$ בקובץ המצורף dataset1.mat (ע"י שימוש ב-load). השתמשו בפונקציה fminunc בשביל לשחזר את התמונה המקורית.

i. הגדירו את המשתנה OPT, שיכיל את הגדרות האופטימיזציה למשל בצורה הבאה:

```
OPT = optimset('Display','iter','DerivativeCheck','off',...
'MaxIter',100,'Gradobj','on','Hessian','off','LargeScale','off');
```

ii. בחרו ניחוש התחלתי `x0` וקראו לפונקציה fminunc בצורה הבאה:

```
xrec = fminunc('func',x0,OPT,arg1,arg2,...);
```

כאשר func היא הפונקציה שכתבתם בסעיף א שמקבלת את הארגומנטים `arg1,arg2,...` (אתם רשאים לקבוע את מספר הארגומנטים ואת ערכיהם). להבהרות לגבי הפונקציות, השתמשו ב-doc או ב-help.

ג. השוו את התמונה שקיבלתם לתוצאה שמתקבלת ע"י שימוש ב-iradon של Matlab. ניתן להציג את התוצאות תוך שימוש ב- imshow(I,[ ]), כאשר I היא התמונה שהתקבלה.

הציגו את התוצאות ויזואלית וגם חשבו שורש של השגיאה הריבועית ביניהן (השגיאה הריבועית הממוצעת היא סכום הריבועים של ההפרשים חלקי מספר הפיקסלים).

3.3.

א. חשבו האם הבעיה שזה עתה פתרתם (שיחזור תמונה בגודל 32x32 שנסרקה בזוויות [0:2:179] מעלות) – יש בה יותר משוואות מנעלמים (בעייה שהיא over-determined) או יותר נעלמים ממשוואות (בעייה שהיא under-determined)?

ב. הציגו את הערכים הסינגולאריים של $\boldsymbol{R}$ על סקלה לוגריתמית. השתמשו ב-svd(full(R)) לחישוב הערכים הסינגולאריים. זה עלול לקחת זמן מה.

ג. האם אתם מצפים לבעיה בפתרון שהצעתם בשאלת הכנה 1.5? הסבירו תשובתכם.

3.4 כעת הניחו שתמונה באותו גודל של 32x32 נסרקת בזוויות [0:10:179], כלומר יש פי 5 פחות היטלים מאשר במקרה הקודם.

א. בנו מטריצה $\boldsymbol{R}$ עבור מקרה זה.

ב. האם במקרה זה הבעיה היא over-determined (יותר מדי משוואות) או under-determined (פחות מדי משוואות)?

ג. הציגו את הערכים הסינגולאריים של $\boldsymbol{R}$ על סקלה לוגריתמית. מה ההבדל מהשאלה הקודמת?

ד. האם אתם מצפים כעת לבעיה בפתרון שהצעתם בשאלת הכנה 1.5? הסבירו תשובתכם. באיזה משני המקרים לדעתכם (בשאלה הקודמת או כאן), הבעיה איננה מוגדרת היטב (ill posed)?

ה. שחזרו את התמונה מהתמרת רדון שלה $\boldsymbol{y}$ הנתונה בקובץ dataset2.mat (המכילה רק את ההיטלים בזוויות [0:10:179]).

ו. הוסיפו רעש גאוסי לבן להתמרת רדון $\boldsymbol{y}$ בקובץ dataset2.mat, כאשר סטיית התקן (std) של הרעש היא 0.1 מסטיית התקן של האות ללא רעש (יחס אות לרעש של 10). ניתן להשתמש בפונקציה randn. שחזרו את התמונה כעת.

ז. הציגו את התוצאות של סעיפים ה ו-ו והשוו ביניהן. מה היא מסקנתכם?

3.5 אחת הדרכים לפתור בעיה שאיננה מוגדרת היטב (ill posed) היא ע"י הוספת איבר רגולריזציה לפונקציה שעליה מבצעים אופטימיזצייה. למשל אם נשתמש ברגולריזציית טיכונוב נבצע מינימיזציה על $\varphi_\lambda(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{Rx}-\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{Rx}-\boldsymbol{y}) + \lambda\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$ עבור פרמטר רגולריזציה $\lambda$.

א. מה ניתן לומר על התמונה שהיא הפתרון הצפוי של מינימיזציית $\varphi_\lambda(\boldsymbol{x})$ (לעומת מינימיזציה של $\varphi(\boldsymbol{x})$ ללא רגולריזציה) עבור $\lambda << 1$? עבור $\lambda >> 1$?

ב. מהו הפתרון האנליטי לבעיה החדשה? השתמשו בתנאי על נקודת המינימום $\boldsymbol{x}^*$: $\nabla\varphi_\lambda(\boldsymbol{x}^*) = 0$. השוו את הפתרון לפתרון של שאלת הכנה 2.3, סעיף ד. הסבירו כיצד הרגולריזציה יכולה לעזור לפתור בעיה שאיננה מוגדרת היטב. התייחסו בהסבר שלכם לערכים הסינגולאריים של $\boldsymbol{R}$ על פי התשובות שלכם לשאלות 3.3 ו-3.4.

ג. כתבו פונקציה [f,grad,hess] = func_reg(x,arg1,arg2,…) שתחשב את הערכים של $\varphi_\lambda(\boldsymbol{x}),\ \nabla\varphi_\lambda(\boldsymbol{x}),\ \nabla^2\varphi_\lambda(\boldsymbol{x})$ בדומה למה שעשיתם בשאלה 3.2, סעיף א.

ד. השתמשו ב-fminunc כדי לבצע שיחזור של המידע ב-dataset2.mat בתוספת רעש גאוסי כמו בשאלה 3.4, סעיף ו, אבל כעת עם רגולריזציה. נסו ערכים שונים של פרמטר הרגולריזציה: $\lambda = 1,10,100,1000$.

ה. הציגו את התוצאות והסבירו את מה שקיבלתם. שימו לב: כאן אין להשתמש ב-imshow(I,[ ]), כאשר I היא התמונה שהתקבלה, כי אז ההשוואה בין התוצאות השונות לא תהיה הוגנת (למה??). מה היא הבעיה עם הרגולריזציה המוצעת?

# חלק ב'

## 4. שאלות הכנה – Fourier Slice Theorem ו-NUFT

4.1. קראו את פרק 3, עמודים 8-12 בספר של Kak & Slaney. אנחנו נתיחס בחלק זה להיטלים מקביליים בלבד.

א. מהו הקשר המתמטי בין התמרת רדון, התמרת פורייה החד-ממדית והתמרת פורייה הדו-ממדית של תמונה? באלו נקודות ניתן לדעת את התמרת הפורייה של התמונה מהמידע של התמרת הרדון?

ב. בהינתן התמרת רדון $R[f(x,y)]$ כיצד ניתן לשחזר ממנה את $f(x,y)$ במישור התדר? הציעו אלגוריתם מתאים.

4.2. בעיית שיחזור התמונה במישור התדר ניתנת להצגה כבעיית שיחזור אות מהתמרת פורייה הלא        אחידה שלו (Non Uniform Fourier Transform או בקיצור NUFT). במקרה החד מימדי הדיסקרטי ה- NUFT של האות $f[n],\ n=0,1,2...,N-1$ הוא למעשה דגימה לא אחידה של התמרת פורייה בזמן בדיד $D(\theta)=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-j\theta n}$. התמרת פוריה הדיסקרטית הרגילה (FFT) של האות $X_N^d[k]$ היא דגימה אחידה של $D(\theta)$, כלומר

$$X_N^d[k]=D\left(\theta=\frac{2\pi k}{N}\right),\ k=0,1,2,...,N-1.$$

לעומת זאת, ה-NUFT היא דגימה באוסף של זוויות $\{\theta_k\},\ k=0,1,2,...,K-1$ כלשהו, שאינו בהכרח במרווחים קבועים: $F[k]=D(\theta=\theta_k)=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-j\theta_k n}$. כאן $F$ מסמנת את התמרת ה-NUFT. ניתן לרשום את ההתמרת בצורה מטריצית:

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ \vdots \\ F(K-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & e^{-j\theta_1} & e^{-j2\theta_1}\ldots & e^{-j(N-1)\theta_1} \\ 1 & e^{-j\theta_2} & e^{-j2\theta_2}\ldots & e^{-j(N-1)\theta_2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & e^{-j\theta_{K-1}} & e^{-j2\theta_{K-1}}\ldots & e^{-j(N-1)\theta_{K-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}=\boldsymbol{\Psi f}.$$

א. שיחזור האות $\boldsymbol{f}$ דורש היפוך של המטריצה $\boldsymbol{\Psi}$. מה לדעתכם הבעיה בפתרון בעיית ההיפוך גם אם נשתמש במינימיזציה איטרטיבית של הפונקציה הריבועית $\left\|\boldsymbol{F}-\boldsymbol{\Psi f}\right\|^2$?

רמז: השוו את מבנה המטריצה $\boldsymbol{\Psi}$ לזה של מטריצת התמרת הרדון $\boldsymbol{R}$ בחלק I (שאלה 1.4, סעיפים ב ו-ג).

ב. האם בדו מימד תהיה אותה בעיה בפתרון בעיית ההיפוך כמו בסעיף הקודם?

4.3. בשביל להימנע מלעבוד ישירות עם המטריצה $\boldsymbol{\Psi}$, ניתן לקרב את ה-NUFT.

א. הניחו כי נתונה לכם התמרת ה-FFT על סריג מלבני בצפיפות גבוהה (oversampled FFT), כלומר יש לכם את $X^{d}_{qN}[k]=D\left(\theta=\frac{2\pi k}{qN}\right),\ k=0,1,2,...,qN-1$ עבור $q$ מספר שלם גדול מ-1. כיצד ניתן לחשב בקירוב את ה-NUFT מתוך ה-FFT הנ"ל ואיטרפולציה ליניארית תוך שימוש ב-2 שכנים? ב-$p$ שכנים? מהי הסיבוכיות החישובית של האלגוריתם (מבחינת מספר מכפלות מרוכבות) אם משתמשים ב-$p$ שכנים?

ב. כיצד ניתן לחשב בקירוב את התמרת ה-NUFT ההופכית ע"י שימוש ב-oversampled FFT ואיטרפולציה לינארית? אין להציע להשתמש פה באלגוריתמי אופטימיזציה נומרית (גם אם יש צורך בהפיכת מטריצות גדולות). מהי הסיבוכיות החישובית של האלגוריתם?

4.4. אחת הצורות לבחור את מקדמי האינטרפולצייה בצורה אופטימאלית היא לפי אלגוריתם של Fessler & Sutton שמבצע אופטימיזציית מינימום-מקסימום למקדמים. במקרה החד מימדי עבור האות $f[n],\ n=0,1,2...,N-1$ , נסמן את ה- oversampled FFT (וקטור בגודל $qNx1$) ע"י הפעולה המטריצית $\boldsymbol{\Phi f}$. אם משתמשים באינטרפולציה לפי $p$ השכנים ניתן לסמן פעולה זו ע"י המטריצה $\boldsymbol{U}^{p}$ (בגודל $KxqN$) ולכן מתקיים בקירוב השוויון: $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{\Psi f}\cong\boldsymbol{U}^{p}\boldsymbol{\Phi f}$. שימו לב שהיות ומשתמשים רק ב-$p$ שכנים, בכל שורה של $\boldsymbol{U}^{p}$ יש לכל היותר $p$ ערכים שונים מ-0. שיטת Fessler & Sutton מציעה למצוא את השורות של $\boldsymbol{U}^{p}$ ע"י מינימיזציה של שגיאת המקרה הכי גרוע (worst case error) בכל נקודה $\theta_k$ של הסריג של ה-NUFT. נסמן ב- $\boldsymbol{u}_k$ את מקדמי האינטרפולציה עבור ה-NUFT בנקודה $\theta_k$ (הערכים השונים מ-0 בשורה $k$ של $\boldsymbol{U}^{p}$). רק חלק מן השורות של $\boldsymbol{\Phi}$ ישתתפו בחישוב של ה-NUFT בנקודה $\theta_k$, למעשה $p$ שורות. נסמן חלק זה ע"י $\boldsymbol{\Phi}^{k}$, כך שמתקיים: $\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{\Psi}^{T}_{k}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{\Psi}_k$ היא שורה $k$ של $\boldsymbol{\Psi}$ בצורת וקטור עמודה, $\boldsymbol{F}_k$ הוא הערך של ה-NUFT ב- $\theta_k$).

את המקדמים $\boldsymbol{u}_k$ נמצא לפי פתרון בעיית האופטימיזצייה: $\min\limits_{\boldsymbol{u}_k}\max\limits_{\boldsymbol{f}:\|\boldsymbol{f}\|\le 1}\left\|\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\Psi}^{T}_{k}\boldsymbol{f}\right\|^{2}$

א. מצאו בצורה אנליטית את $\max\limits_{\boldsymbol{f}:\|\boldsymbol{f}\|\le 1}\left\|\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\Psi}^{T}_{k}\boldsymbol{f}\right\|^{2}$ , כלומר את מקסימום שגיאת האינטרפולציה על כל האותות $\boldsymbol{f}$ שהנורמה הריבועית שלהם קטנה או שווה ל-1.

ב. הציבו את התוצאה שקיבלתם ומצאו את המקדמים $\boldsymbol{u}_k$ שהם פתרון לבעיית האופטימיזציה הנ"ל.

ג. כיצד לדעתכם ביצוע אינטרפולציה לחישוב מקורב של ה-NUFT לפי $\boldsymbol{F}\cong\boldsymbol{U}^{p}\boldsymbol{\Phi f}$ פותר את הבעיה של שיחזור אות מה-NUFT שלו המחושב ישירות לפי $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{\Psi f}$, כפי שראיתם בשאלה 4.2, סעיף א?

רמז: חישבו על אופי המטריצה של מקדמי האינטרפולציה $\boldsymbol{U}^{p}$ ועל סיבוכיות חישוב ה-oversampled FFT ($\boldsymbol{\Phi f}$).

4.5.

א. הציעו דרך לחשב בקירוב את התמרת ה-NUFT ההופכית (inverse NUFT) בצורה איטרטיבית תוך שימוש בהתמרת NUFT הרגילה (forward NUFT). כתבו את פונקצית המטרה שיש למזער ואת הביטוי לגרדיאנט שלה.

ב. מהי סיבוכיות חישוב הפונקציה ומה היא סיבוכיות חישוב הגרדיאנט שלה?

ג. הציעו אלגוריתם איטרטיבי למציאת הפתרון למינימיזציית פונקציית המטרה, שהגדרתם בסעיף א תוך שימוש בגרדיאנט. רשמו את שלבי האלגוריתם.

**להגשה-דוח מכין חלק ב'**

- תשובות לכל השאלות שנדרשת בהן תשובה בכתב ( ).
- יש לצרף שרטוט בשאלות שבהן הדבר רלוונטי.

## 5. חלק ב' – סימולציות

5.1. בחלק זה נרצה לשחזר תמונה בגודל 32x32 מתוך התמרת רדון שלה במישור התדר. נשתמש לצורך כך במימוש של ה-NUFT של Fessler & Sutton (בקבצים המצורפים לניסוי).

א. טענו את הנתונים בקובץ datasetNUFT.mat. בתוך קובץ זה תמצאו את הערכים של התמרת ה-NUFT (F) על פני סריג לא אחיד (K) המתאים להתמרת הפורייה של ההיטלים של התמונה, אותה רוצים לשחזר. כמו כן תמצאו בקובץ זה את המבנה st, המכיל את הגדרות ה-NUFT לאלגוריתם של Fessler & Sutton.

ב. הציגו את נקודות הסריג הלא אחיד, שהן שורות המטריצה K. כמה נקודות יש בסריג? כמה היטלים של התמונה נלקחו?

ג. לצורך שיחזור התמונה מהתמרת ה-NUFT שלה נתונה לכם הפונקצייה

```
[e,de] = func_nufft(f,st,F,N,lambda)
```

כאשר f היא תמונת הקלט (ב-column stack), st הוא המבנה (struct) המוזכר בסעיף א, F הם הנתונים שטענתם של ה-NUFT, N=32 הוא גודל התמונה ו-lambda הוא פרמטר רגולריזציה.

על פי שאלה 4.5, סעיף א, מה מחזירה פונקציה זו?

ד. בדומה למה שעשיתם בחלק I הגדירו

```
OPT = optimset('Display','iter','DerivativeCheck','off',…
'MaxIter',30,'Gradobj','on','Hessian','off','LargeScale','off');
```

כעת בחרו ניחוש התחלתי x0 והשתמשו בפונקציה fminunc בשביל לשחזר את התמונה בצורה:

```
xrec = fminunc('func_nufft',x0,OPT, st,F,…);
```

ה. הציגו את תוצאות השחזור עבור lambda=0 וערכים אחרים, למשל lambda=10,100,10000,1e5,1e6. השוו בין התוצאות. מהי מסקנתכם? אין להשתמש ב-imshow(I,[ ]) לצורך השוואה הוגנת של התוצאות.

ו. הוסיפו כעת רעש גאוסי לבן לערכי ה-NUFT (F) , כאשר סטיית התקן (std) של הרעש היא 0.1 מסטיית התקן של האות ללא רעש. הוסיפו רעשים בלתי תלויים כאלו לחלק הממשי של הווקטור F ולחלק המדומה. שחזרו את התמונה כעת לאותם ערכי lambda כמו בסעיף הקודם.

הציגו את תוצאות השחזור והשוו לתוצאות ללא רעש בסעיף ה. מהי מסקנתכם לגבי השפעת הרגולריזציה? גם כאן אין להשתמש ב-imshow(I,[ ]) לצורך השוואה הוגנת של התוצאות.

**להגשה-דוח מסכם**

- תשובות לכל השאלות שנדרשת בהן תשובה בכתב ( ).
- גרפים בכל השאלות, בהן נדרש להציג תוצאות ( ) ובנוסף הסברים של התוצאות שקיבלתם.
- הדפסה של קוד ה-Matlab שכתבתם לשני החלקים של הניסוי (בשאלות שמסומנות ב- ).